НАУКА ЮГА РОССИИ 2023 Т. 19 № 3 С. 3–8
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2023 VOL. 19 No 3 P. 3–8

МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640230301

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМЫ И СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИИ

© 2023 г. В.В. Лозовой[1], Е.М. Горшкова[2], А.В. Плужник[1], С.Б. Уафа[2]

Аннотация. Изучена возможность оценки поведения литосферных плит неклассической формы, находящихся на многослойном основании. Исследование диктуется необходимостью исследования динамических свойств таких литосферных плит в связи с обнаружением возможности возникновения у них резонансов. Резонансы могут влиять на сейсмическое состояние территории литосферной плиты и провоцировать землетрясения.

В качестве литосферной плиты изучается клиновидная плита в форме четверти плоскости. Решение рассматриваемой задачи опирается на возможность решения контактной задачи в клиновидной области, в которой действует деформируемый штамп. Решения граничных задач для штампов сложной реологии после этого представляются комбинацией решений граничных задач для штампов простой реологии. В настоящей статье ранее разработанный новый математический аппарат, основанный на фрактальных свойствах блочных элементов, применяется для анализа рассматриваемой задачи. С учетом практики применения этого подхода удается достигнуть определенных результатов. В более ранних работах для получения всех параметров, описывающих поведение литосферных плит в квадранте, требовалось изучение трех уравнений. В настоящей работе построено одно уравнение второго рода с вполне непрерывным оператором, позволяющее охватить все необходимые параметры. Это дает возможность аппроксимировать его конечной системой алгебраических уравнений и достаточно просто получать дисперсионное уравнение.

Обсуждаются вопросы рассмотрения литосферных плит сложных реологий.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, интегральное уравнение Винера – Хопфа.

ABOUT ONE METHOD OF INVESTIGATION OF LITHOSPHERIC PLATES OF NON-CLASSICAL SHAPE AND COMPLEX RHEOLOGY

V.V. Lozovoy[1], E.M. Gorshkova[2], A.V. Pluzhnik[1], S.B. Uafa[2]

Abstract. The paper studies the possibility of assessing the behavior of lithospheric plates of non-classical shape, located on a multilayer base. The study is driven by the need to survey the dynamic properties of such lithospheric plates due to the discovery of the possibility of their resonances. Resonances can affect the seismic state of the territory of the lithospheric plate and provoke earthquakes.

As a lithospheric plate, a wedge-shaped plate in the form of a quarter of a plane is being studied. The solution of the problem under consideration is based on the possibility of solving the contact problem in a wedge-shaped region in which a deformable stamp acts. Solutions to boundary value problems for complex rheology dies are then a combination of solutions to boundary value problems for simple rheology dies. In this article, a previously developed new mathematical tool based on the fractal properties of block elements is used to analyze the problem under consideration. Given the practice of applying this approach, it is possible

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41

[2] Кубанский государственный университет (Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation), Российская Федерация, 350059, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, e-mail: gem@kubsu.ru

to achieve certain results. In earlier works, to obtain all the parameters describing the behavior of lithospheric plates in a quadrant, it was necessary to study three equations. In this paper, we construct one equation of the second kind with a completely continuous operator, which makes it possible to cover all the necessary parameters. It allows this equation to be approximated by a finite system of algebraic equations and it is rather simple to obtain a dispersion equation.

The issues of consideration of lithospheric plates of complex rheologies are discussed.

Keywords: contact problem, block element, deformable punch, Wiener-Hopf integral equation.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается поведение литосферной плиты, занимающей область первого квадранта на многослойной среде сложной реологии.

Изучение и решение подобных задач связано с возможностью исследование контактных задач в сложных областях. Определенный вклад в решение этих задач внесли важные работы [1–10]. Однако задачи с деформируемым штампом в этих работах не изучались, хотя в них заложена основа для перехода к деформируемым штампам. Особенностью контактных задач с деформируемым штампом является возможность возникновения дискретных резонансов, обнаруженных академиком И.И. Воровичем. Именно глубокие теоретические исследования в этой области [11; 12] позволили ему получить теоретические результаты, свидетельствующие о возможности дискретных резонансов в неоднородной полосе. В связи со сложностью решения динамических контактных задач для деформируемого штампа в работе [13] была предложена модель деформируемого штампа, состоящая из абсолютно твердых массивных штампов, соединенных упругой пружиной. Пространственные задачи И.И. Воровичем не исследовались. Разработанные новые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений [14] позволили решать ряд пространственных динамических контактных задач. В частности, в работе [15] исследована контактная задача для полосового штампа. В статье [16] построены интегральные представления решения контактной задачи в четверти плоскости для деформируемого штампа, моделируемого мембраной. В работе [16] получено решение контактной задачи с деформируемым штампом в четверти плоскости. Нахождение некоторых функционалов, описывающих резонансные частоты, сведено к трем интегральным уравнениям. В настоящей работе их нахождение удалось свести к одному интегральному уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Это дает возможность аппроксимировать его конечной системой алгебраических уравнений и достаточно просто получать дисперсионное уравнение. В реальности литосферные плиты имеют сложное реологическое строение. Эти вопросы обсуждаются в настоящей работе.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИТОСФЕРНОЙ ПЛИТЫ

Для решения контактной задачи в первом квадранте применяется метод, основанный на свойствах фракталов – упакованных блочных элементов [14]. Он позволяет сводить интегральное уравнение Винера – Хопфа к системе дифференциальных уравнений с последующим ее решением. Следуя работе [16], рассмотрим интегральное уравнение Винера – Хопфа в первом квадранте:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\varphi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2),$$

$$0 \le x_1, x_2 \le \infty,$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2) \equiv K(u) = \frac{R(u)}{P(u)}, \quad u=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \quad (1)$$

$$K(u) = \frac{R(u)}{P(u)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(u)}{P_n(u)},$$

$$R_n(u) = (u^2 - z_n^2), \quad P_n(u) = (u^2-\xi_n^2),$$

$$K(u) = \frac{1}{u}(1+o(1)), \quad u \to \pm\infty.$$

Ради краткости здесь сохранены обозначения, принятые в работе [16]. Функции $R(u)$, $P(u)$ являются четными целыми функциями, представимыми бесконечными произведениями. Предполагается, что функции $R(u)$ и $P(u)$ являются целыми функциями первого порядка и конечного типа, то есть трансцендентными, в частности полиномами. В принятых обозначениях целая функции $R(u)$ обращается в нуль на множествах значений $u = \pm z_n$. Разрешая эти соотношения относительно переменных α_s, $s = 1,2$, имеем нули в форме $\alpha_{11m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - z_m^2}$, $\alpha_{21m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - z_m^2}$. Соответственно, целая функция $P(u)$ имеет нули на множествах $u_n = \pm\zeta_n$, $\alpha_{12r\pm} = \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha_2^2 - \xi_r^2}$, $\alpha_{22r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - \xi_r^2}$. Все нули, предполагаемые однократными, имеют точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях, содержащих мнимые полуоси комплексной плоскости. Для нулей приняты обозначения в индексах: плюс – принадлежность верхней полуплоскости комплексной плоскости, минус – нижней.

$$R_m(u) = R_{m\pm}(\alpha_m) R_{m\mp}(\alpha_m),$$

$$R_{m\mp}(\alpha_m) = T_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}},$$

$$T_{m\mp} = \mathrm{const}, \quad m = 1,2,$$

$$P_m(u) = P_{m\pm}(\alpha_m) P_{m\mp}(\alpha_m),$$

$$P_{m\mp}(\alpha_m) = S_{m\mp} e^{\mp i\alpha_m} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}\right) e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}},$$

$$S_{m\mp} = \mathrm{const}, \quad m = 1,2,$$

$$K_{+m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m-}(\alpha_m)}{P_{m-}(\alpha_m)},$$

$$K_{-m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m+}(\alpha_m)}{P_{m+}(\alpha_m)}.$$

После деления $R_m(u)$ на $P_m(u)$ возникают мероморфные функции, обозначенные $K(u)$. Их нулями являются $\pm z_{mp}$. Примем правую часть $f(x_1,x_2)$ интегрального уравнения (1) в форме

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2.$$

Для построения решения будем отыскивать решение в виде [16]:

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s+} x_1 + \beta_2 x_2)} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+} x_2)} + D(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)},$$

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1} e^{i(\beta_{11s+} x_1 + \beta_2 x_2)},$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2} e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+} x_2)},$$

$$\varphi_*(x_1, x_2) = D(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}.$$

Следуя выполненным в работе [16] преобразованиям, получим решение интегрального уравнения (1) в форме:

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_*(x_1, x_2),$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{K_{+1}(\eta_1, \beta_2)}{K_{+1}(\lambda, \beta_2)(\eta_1 - \lambda)} \times$$

$$\times \frac{A(\eta_1, \eta_2)_1}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\lambda d\beta_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{K_{+2}(\beta_1, \eta_2)}{K_{+2}(\beta_1, \lambda)(\eta_2 - \lambda)} \times \tag{2}$$

$$\times \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\lambda d\beta_1 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{K(\eta_1, \eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2.$$

Построенное решение двумерного уравнения Винера – Хопфа в первом квадранте легко трансформируется в решения одномерных уравнений Винера – Хопфа в тех случаях, когда происходит замена $K(\alpha_1,\alpha_2) \to K(\alpha_1)$ или $K(\alpha_1,\alpha_2) \to K(\alpha^2)$ и совпадает с решениями одномерных уравнений Винера – Хопфа.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ШТАМПА

Рассмотрим граничную задачу для уравнений Гельмгольца, моделирующего материал деформируемого штампа простой реологии:

$$(\Delta + k^2)\psi(x_1,x_2) = q(x_1,x_2) - t(x_1,x_2),$$
$$k = c\omega,\ c = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $\psi(x_1,x_2)$ – решение граничной задачи для уравнений Гельмгольца, $q(x_1,x_2)$ – воздействие на штамп со стороны многослойной среды в области контакта, $t(x_1,x_2)$ – внешнее воздействие на штамп сверху. Для уравнения Гельмгольца ставится граничная задача Дирихле в предположении, что на границах задаются граничные условия вида:

$$\psi_1(x_1,x_2) = \psi_1(0,x_2),\ \psi_2(x_1,x_2) = \psi_2(x_1,0).$$

Вводится обозначение $s(x_1,x_2) = q(x_1,x_2) - t(x_1,x_2)$. В результате получается следующая внешняя форма для граничной задачи (3):

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} - 1\right] \left\langle \Psi_1(0, \alpha_2) - \Psi_1(0, \alpha_{2+}) \right\rangle +$$

$$+ \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} - 1\right] \left\langle \Psi_2(\alpha_1, 0) - \Psi_2(\alpha_{1+}, 0) \right\rangle + S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{1+}, \alpha_{2+}).$$

Здесь принято обозначение:

$$S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{1+},\alpha_{2+}) =$$

$$= -Q(\alpha_1,\alpha_2) - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+},\alpha_{2+}) +$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+},\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1,\alpha_{2+}) +$$

$$+ T(\alpha_1,\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}} T(\alpha_{1+},\alpha_{2+}) -$$

$$- \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} T(\alpha_{1+},\alpha_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} T(\alpha_1,\alpha_{2+}),$$

$$\alpha_{1+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2},$$

$$Re\sqrt{\alpha_m^2 - k^2} > 0, \quad v = 1,2.$$

Ниже прописными буквами обозначаются преобразования Фурье от функций, обозначенных строчными буквами, например

$$Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx.$$

Первые четыре члена справа в функции $S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{1+},\alpha_{2+})$ представляют преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения $Q(\alpha_1,\alpha_2)$ и неизвестные функционалы $Q(\alpha_{1+},\alpha_{2+})$, $Q(\alpha_{1+},\alpha_2)$, $Q(\alpha_1,\alpha_{2+})$ от искомого контактного напряжения. Остальные члены справа представляют преобразования Фурье и функционалы от задаваемых внешних воздействий. При решении задачи вначале определяются контактные напряжения под деформируемым штампом, после этого определяются функционалы.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЛИТОСФЕРНОЙ ПЛИТЫ

Для составления интегрального уравнения задачи представим перемещение (3) $\psi(x_1,x_2)$ деформируемого штампа в области контакта в виде упакованного блочного элемента. Имеем:

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\omega(\alpha_1,\alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)}.$$

Преобразуем представление внешней формы, разделив в ней неизвестные и заданные составляющие. Имеем:

$$\omega(\alpha_1,\alpha_2) = -Q(\alpha_1,\alpha_2) + Q_1(\alpha_1,\alpha_2) + G(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$Q_1(\alpha_1,\alpha_2) = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+},\alpha_{2+}) +$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+},\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1,\alpha_{2+}),$$

$$G(\alpha_1,\alpha_2) = T(\alpha_1,\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}} T(\alpha_{1+},\alpha_{2+}) -$$

$$- \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} T(\alpha_{1+},\alpha_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} T(\alpha_1,\alpha_{2+}) +$$

$$+ \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} - 1\right] \left\langle \Psi_1(0,\alpha_2) - \Psi_1(0,\alpha_{2+}) \right\rangle +$$

$$+ \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} - 1\right] \left\langle \Psi_2(\alpha_1,0) - \Psi_2(\alpha_{1+},0) \right\rangle.$$

Возьмем в решении интегрального уравнения (2) в качестве неизвестной функции $\varphi(x_1,x_2)$ контактные напряжения $q(x_1,x_2)$, возникающие под деформируемым штампом. Приравняем вертикальные перемещения поверхности многослойной среды $f(x_1,x_2)$ к параметрам вертикального перемещения $\psi(x_1,x_2)$ деформируемого штампа снизу. В результате приходим к интегральному уравнению вида

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} m(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{Q_1(\eta_1,\eta_2) + G(\eta_1,\eta_2)}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 - k^2)} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2,$$

$$m(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} M(\alpha_1,\alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$M(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{R(u)\left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)\right] + P(u)}{P(u)\left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)\right]},$$

$$Q_1(\alpha_1,\alpha_2) = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}} Q(\alpha_{1+},\alpha_{2+}) +$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}} Q(\alpha_{1+},\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} Q(\alpha_1,\alpha_{2+}).$$

Воспользуемся построенным решением интегрального уравнения Винера – Хопфа в первом квадранте [16]. С учетом принятых обозначений его решение для произвольной правой части имеет вид:

$$q(x_1,x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1,\beta_2)}{M_{+1}(\lambda_1,\beta_2)(\eta_1 - \lambda_1)} \times$$

$$\times \frac{A(\eta_1,\eta_2)_1}{M(\eta_1,\eta_2)} e^{i(-\lambda x_1 + \beta_2 x_2)} d\lambda_1 d\beta_2 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_3} \int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\beta_1,\eta_2)}{M_{+2}(\beta_1,\lambda_2)(\eta_2 - \lambda_2)} \times$$

$$\times \frac{A(\eta_1,\eta_2)}{M(\eta_1,\eta_2)} e^{i(\beta_1 x_1 - \lambda x_2)} d\lambda_2 d\beta_1 d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1,\eta_2)}{M(\eta_1,\eta_2)} e^{-i(\eta_1 x_1+\eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2.$$

Имеет место обозначение

$$\frac{A(\eta_1,\eta_2)}{M(\eta_1,\eta_2)}=\frac{\left[Q_1(\eta_1,\eta_2)+G(\eta_1,\eta_2)\right]P(u)}{R(u)\left[(\eta_1^2+\eta_2^2-k^2)\right]+P(u)},$$

$$u=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}.$$

Для нахождения функционалов $Q(\alpha_{1+},\alpha_{2+})$, $Q(\alpha_{1+},\alpha_2)$, $Q(\alpha_1,\alpha_{2+})$ применим преобразование Фурье по координатам x_1, x_2, с параметрами α_1, α_2 получим соотношение

$$Q(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1,\eta_2)(\eta_1-\alpha_1)(\eta_2-\alpha_2)}+$$

$$+\frac{i2\pi}{M_{+1}(\alpha_1,\alpha_2)}\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{M_{+1}(\eta_1,\alpha_2)}{(\eta_1-\alpha_1)}\frac{A(\eta_1,\eta_2)_1}{M(\eta_1,\eta_2)}d\eta_1 d\eta_2+$$

$$+\frac{i2\pi}{M_{+2}(\alpha_1,\alpha_2)}\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{M_{+2}(\alpha_1,\eta_2)}{(\eta_2-\alpha_2)}\frac{A(\eta_1,\eta_2)}{M(\eta_1,\eta_2)}d\eta_1 d\eta_2.$$

В результате ряда преобразований получаем систему трех интегральных уравнений для определения функционалов, входящих под интегралы справа:

$$Q(\alpha_{1+},\alpha_2)=$$

$$=-\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1,\eta_2)(\eta_1-\alpha_{1+})(\eta_2-\alpha_2)}+G_1(\alpha_{1+},\alpha_2),$$

$$Q(\alpha_1,\alpha_{2+})=$$

$$=-\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1,\eta_2)(\eta_1-\alpha_1)(\eta_2-\alpha_{2+})}+G_1(\alpha_1,\alpha_{2+}),$$

$$Q(\alpha_{1+},\alpha_{2+})=$$

$$=-\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4} \frac{A(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2}{M(\eta_1,\eta_2)(\eta_1-\alpha_{1+})(\eta_2-\alpha_{2+})}+G_1(\alpha_{1+},\alpha_{2+}).$$

В результате исследования проблема определения искомых функционалов сведена к одному интегральному уравнению относительно неизвестной $Q_1(\alpha_1,\alpha_2)$ вида

$$Q_1(\alpha_1,\alpha_2)=-\int_{\gamma_3}\int_{\gamma_4}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}(\eta_1-\alpha_{1+})(\eta_2-\alpha_2)}+\right.$$

$$+\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}(\eta_1-\alpha_1)(\eta_2-\alpha_{2+})}-$$

$$\left.-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}(\eta_1-\alpha_{1+})(\eta_2-\alpha_{2+})}\right]\times$$

$$\times\left[Q_1(\eta_1,\eta_2)B(\eta_1,\eta_2)+G_1(\eta_1,\eta_2)\right]d\eta_1 d\eta_2-$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_{1+}\alpha_{2+}}G_1(\alpha_{1+},\alpha_{2+})+\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+}}G_1(\alpha_{1+},\alpha_2)+\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}}G_1(\alpha_1,\alpha_{2+}).$$

Оно содержит все искомые функционалы. Несложно проверить, что оператор в правой части является вполне непрерывным в некотором весовом пространстве. Это означает, что он является компактным и допускает аппроксимацию конечной системой алгебраических уравнений, приводящей к сходимости приближенного решения к точному.

ВЫВОД

В работе построено аналитическое решение динамической контактной задачи с деформируемым штампом в области первого квадранта. Для нахождения резонансных частот академика И.И. Воровича задача сведена к решению одного интегрального уравнения с вполне непрерывным оператором. Это дает возможность аппроксимировать его конечной системой алгебраических уравнений и достаточно просто получать дисперсионное уравнение.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации госзадания на 2023 г. ЮНЦ РАН (тема 01201354241-0) и Минобрнауки (проект FZEN-2023-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г., Добычин М.Н. 1988. *Контактные задачи трибологии.* М., Машиностроение: 256 с.
2. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. 2015. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 471(2180): 20150271. doi: 10.1098/rspa.2015.0271
3. Kagan Y.Y. 1997. Are earthquake predictable? *Geophysical Journal International.* 131(3): 505–525. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb06595.x
4. Kerr R.A. 1979. Earthquake prediction: Mexican quake shows one way to look for the big ones. *Science.* 203(4383): 860–862. doi: 10.1126/science.203.4383.860
5. Lu X., Lapusta N., Rosakis A.J. 2007. Pulse-like and crack-like ruptures in experiments mimicking crustal earthquakes. *PNAS.* 104(48): 18931–18936. doi: 10.1073/pnas.070426810
6. Mogi K. 1967. Earthquake and fracture. *Tectonophysics.* 5(1): 35–55. doi: 10.1016/0040-1951(67)90043-1
7. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. 2007. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*. 40(4): 574–579. doi: 10.1016/j.triboint.2005.11.008

8. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem. *MATLAB Central File Exchange.* URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem (последнее обновление 26.08.2013).

9. Di Toro G., Han R., Hirose T., De Paola N., Nielsen S., Mizoguchi K., Ferri F., Cocco M., Shimamoto T. 2011. Fault lubrication during earthquake. *Nature*. 471(7339): 494–498. doi: 10.1038/nature09838

10. Geller R.J. 1997. Earthquake prediction: a critical review. *Geophysical Journal International.* 131(3): 425–450. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb06588.x

11. Ворович И.И. 1979. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*. 245(4): 817–820.

12. Ворович И.И. 1979. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *Доклады АН СССР*. 245(5): 1076–1079.

13. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. 1999. *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах*. М., Наука: 246 с.

14. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. 2021. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки.* 499(1): 30–35. doi: 10.31857/S2686740021040039

15. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. 2022. О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*. 84(1): 25–34. doi: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34

16. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Евдокимов В.С. 2023. О контактной задаче с деформируемым штампом в четверти плоскости. *Прикладная математика и механика.* 87(2): 303–313. doi: 10.31857/S0032823523020030

REFERENCES

1. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. 1988. *Kontaktnye zadachi tribologii.* [*Contact problems of tribology*]. Moscow, Mashinostroenie: 256 p. (In Russian).

2. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. 2015. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 471(2180): 20150271. doi: 10.1098/rspa.2015.0271

3. Kagan Y.Y. 1997. Are earthquake predictable? *Geophysical Journal International.* 131(3): 505–525. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb06595.x

4. Kerr R.A. 1979. Earthquake prediction: Mexican quake shows one way to look for the big ones. *Science.* 203(4383): 860–862. doi: 10.1126/science.203.4383.860

5. Lu X., Lapusta N., Rosakis A.J. 2007. Pulse-like and crack-like ruptures in experiments mimicking crustal earthquakes. *PNAS.* 104(48): 18931–18936. doi: 10.1073/pnas.070426810

6. Mogi K. 1967. Earthquake and fracture. *Tectonophysics.* 5(1): 35–55. doi: 10.1016/0040-1951(67)90043-1

7. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. 2007. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*. 40(4): 574–579. doi: 10.1016/j.triboint.2005.11.008

8. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem. *MATLAB Central File Exchange.* Available at: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem (last updated 26 August 2013).

9. Di Toro G., Han R., Hirose T., De Paola N., Nielsen S., Mizoguchi K., Ferri F., Cocco M., Shimamoto T. 2011. Fault lubrication during earthquake. *Nature*. 471(7339): 494–498. doi: 10.1038/nature09838

10. Geller R.J. 1997. Earthquake prediction: a critical review. *Geophysical Journal International.* 131(3): 425–450. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb06588.x

11. Vorovich I.I. 1979. [Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous band]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 245(4): 817–820. (In Russian).

12. Vorovich I.I. 1979. [Resonant properties of an elastic inhomogeneous band]. *Doklady Akademii nauk SSSR.* 245(5): 1076–1079. (In Russian).

13. Vorovich I.I., Babeshko V.A, Pryakhina O.D. 1999. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh.* [*Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media*]. Moscow, Nauka: 246 p. (In Russian).

14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. 2021. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Physics.* 66(8): 218–222. doi: 10.1134/S1028335821080012

15. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. 2022. [On contact problems with a deformable stamp]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 84(1): 25–34. (In Russian). doi: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34

16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zaretskaya M.V., Evdokimov V.S. 2023. [On the contact problem with deformable stamp in the quarter plane]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 87(2): 302–312. (In Russian). doi: 10.31857/S0032823523020030

Поступила 26.04.2023