НАУКА ЮГА РОССИИ 2023 Т. 19 № 3 С. 9–17
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2023 VOL. 19 No 3 P. 9–17

МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640230302

К МОДЕЛИРОВАНИЮ МЕДЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И СТАТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛИТОСФЕРНЫХ ОТДЕЛЬНОСТЕЙ

© 2023 г. И.С. Телятников[1], А.В. Павлова[1]

Аннотация. Исследование направлено на развитие механико-математических моделей и методов изучения напряженно-деформированного состояния геофизических структур, подверженных статическому нагружению, а также низкочастотным гармоническим нагрузкам. Представлен метод решения задач о статическом взаимодействии системы плит покрытия с упругой подложкой. В рамках данной модели выражения для смещений лицевой поверхности и контактных напряжений построены на основе решения матрично-функциональных уравнений Винера – Хопфа, к которым сводится исходная задача. Наряду со статической задачей, возникающей при исследовании факторов, влияющих на прочностные свойства геологических структур, также рассмотрена задача о длиннопериодных установившихся колебаниях системы покрытие/подложка.

Ключевые слова: среда с покрытием, статическая нагрузка, гармонический источник, прямолинейный разлом, метод собственных функций.

ON THE MODELING OF SLOW OSCILLATIONS AND STATIC INTERACTION OF LITHOSPHERIC UNITS

I.S. Telyatnikov[1], A.V. Pavlova[1]

Abstract. The mechanical concept of assessing the seismicity of territories is based on the determination of stress concentration zones in lithospheric structures, which is one of the signs by which one can judge the places of possible seismic events. The study is aimed at the development of mechanical and mathematical models and methods for studying the stress-strain state of geophysical structures subject to static loads, as well as low-frequency harmonic loads. The paper presents a method for solving problems of the static interaction for a system of coating plates with an elastic substrate. In this model, the equations for displacements of the front surface and contact stresses are constructed on the basis of the solutions for the matrix-functional Wiener-Hopf equations, to which the original problem is reduced. A feature of the equations obtained is the presence on the right side of unknown functionals of the solution and its derivative, which are determined from a system of linear algebraic equations. Based on the developed approach, we presented a method for determining all the main characteristics of the stress-strain state of a block structure formed by two contacting plates on a deformable base. Along with the static problem arising in the study of factors affecting the geological structures strength properties, the paper also considers the problem for long-period steady oscillations of the coating/substrate system. For low frequencies, we propose to proceed to the sequential solution of several static problems.

Keywords: coated medium, static load, harmonic source, straight line fault, eigen function method.

[1] Кубанский государственный университет (Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation), Российская Федерация, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, e-mail: rector@kubsu.ru, ilux_t@list.ru

ВВЕДЕНИЕ

К главным проблемам, стоящим перед сейсмологами, относится выделение отдельного класса прогностических задач, обеспечивающих предсказание развития сейсмического события [1]. В последние десятилетия вырос интерес к исследованию длиннопериодных возмущений, регистрируемых перед крупными землетрясениями. В частности, установлено [1; 2], что медленным движениям масштабных геологических отдельностей в геологических структурах литосферы присущи резонансные особенности. Еще в конце прошлого столетия ученые-геофизики выделили особый класс сейсмогравитационных возмущений, предваряющих удар [3]. Спектр собственных колебаний Земли к настоящему времени достаточно хорошо изучен, однако колебания с большими периодами, выделенные по записям сильных землетрясений, исследованы не до конца, их интерпретация остается не вполне ясной. В связи с этим представляет интерес исследование модели контактирующих вдоль разлома литосферных структур в условиях низкочастотных колебаний. Целью данного исследования является построение моделей и разработка методов решения краевых задач, описывающих деформационные процессы в структурах с вертикальными разломами.

Системы с плоскопараллельными границами и пластины являются расчетными схемами многих элементов конструкций. Подобные структуры получили широкое распространение и при моделировании геологической среды. Многие публикации прикладного характера содержат описание методов решения и результаты для однородных и двухслойных структур [1]. В настоящей работе рассматривается модель системы покрытие/подложка. Для описания процессов в деформируемой подложке используются соотношения линейной теории упругости. Поведение плит покрытия описывается уравнениями для двумерных пластин. Покрытие имеет прямолинейный разлом, глубина которого сопоставима с толщиной исследуемых протяженных структур покрытия, то есть совокупность пары плит, занимающих полуплоскости Ω_j, $j=1,2$, находится во взаимодействии с линейно деформируемым основанием, где $\Omega_1=\{(x_1,x_2):|x_2|<\infty,\ x_1>0\}$, $\Omega_2=\{(x_1,x_2):|x_2|<\infty,\ x_1<0\}$. Одна из частей покрытия подвергается локальному нагружению. Подобные модели позволяют получить информацию о процессах возбуждения и распространения сейсмических волн от поверхностных источников различной природы. Рассматривается вопрос перехода от задачи для низкочастотных колебаний к статической задаче при уменьшении частоты вибрации.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуются установившиеся относительно положения равновесия гармонические (с круговой частотой ω) колебания системы, вызванные поверхностной локальной нагрузкой, характер которых позволяет перейти к решению задачи относительно комплексных амплитуд. Один из подходов к исследованию таких задач для системы покрытие/подложка описан в работе [4].

Так как реализация изложенного в статье [4] метода для низких частот вызывает ряд трудностей (при стремлении частоты колебаний к нулю однократные нули определителя матрицы-символа дифференциального оператора системы уравнений колебания пластин, сливаясь, переходят в двукратные), чтобы избежать накопления ошибки, предлагается при малых значениях ω строить приближенное решение путем последовательного решения серии статических задач.

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ПРОТЯЖЕННЫХ ПЛИТ НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОДЛОЖКЕ

Изучение границ применимости одномерных и двумерных приближенных моделей для плит и пластин, полученных из общих уравнений теории упругости, проводилось многими авторами. Результаты этих исследований отражены в публикациях [5–12] и др. В работе [9] представлены решения векторной и скалярной статических граничных задач для разнотипных покрытий с помощью универсального топологического метода, позволяющего рассматривать любые конфигурации границ. В данной работе для случая прямолинейной границы применен подход, упрощающий построение представлений решений.

Для определенности будем полагать, что координатная плоскость $x_3=0$ совпадает со срединной плоскостью плит покрытия, а плоскопараллельные границы подложки горизонтальны.

Рассмотрим применение метода собственных функций, описанного в статье [4], к решению статической задачи. Вектор перемещений $\mathbf{u}_j(x_1,x_2)$ точек срединной плоскости j-й плиты, совпадающей с горизонтальной плоскостью введенной декартовой системы координат, удовлетворяет уравнению [13], полученному путем линеаризации приведенного в работе [5]:

$$\mathbf{R}_{0j}(\partial x_1,\partial x_2)\mathbf{u}_j(x_1,x_2)-\mathbf{E}_j\mathbf{g}_j(x_1,x_2)=\mathbf{b}_j(x_1,x_2),$$
$$(x_1,x_2)\in\Omega_j,\ j=1,2,\ \mathbf{R}_{0j}=\left\|R_{km}^{0j}\right\|_{k,m=1}^{3}. \tag{1}$$

В (1) элементы симметричного ($R_{km}^{0j}=R_{mk}^{0j}$) матричного оператора $\mathbf{R}_{0j}$ и $\mathbf{E}_j$ зависят от параметров плиты: толщины h_j, плотности ρ_j, коэффициента Пуассона ν_j, модуля Юнга E_j,

$$R_{11}^{0j}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\varepsilon_{j1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \ R_{22}^{0j}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\varepsilon_{j1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$
$$R_{12}^{0j}=\varepsilon_{j2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ \ R_{33}^{0j}=\varepsilon_{j3}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right),$$
$$R_{13}^{0j}=R_{23}^{0j}=0,\ \mathbf{E}_j=\operatorname{diag}\{-\varepsilon_{j5},-\varepsilon_{j5},\varepsilon_{j5}\},$$
$$\varepsilon_{j1}=0{,}5(1-\nu_j),\ \varepsilon_{j2}=0{,}5(1+\nu_j),$$
$$\varepsilon_{j3}=h_j^2/12,\ \ \varepsilon_{j5}=\left(1-\nu_j^2\right)\left(E_jh_j\right)^{-1}.$$

Предполагается, что система подвергается локальному нагружению на лицевой поверхности, описываемому вектор-функцией $\mathbf{b}_j=-\varepsilon_{j5}\mathbf{t}_j$. Вектор-функция нагрузки на нижней грани плиты $\mathbf{g}_j$ является неизвестной и определяется из условия идеального сопряжения плиты-покрытия с трехмерным основанием. Для учета распределения контактных напряжений необходимо решить связную контактную задачу о взаимодействии плит покрытия с упругой подложкой.

На берегах вертикального разлома ($x_1=0,\ x_3=0$) рассматриваются условия вида [5; 6]:

$$\sum_{j=1}^{2}\mathbf{L}_j\left(\partial x_1,\partial x_2\right)\mathbf{u}_j\left(0,x_2\right)=\mathbf{f}\left(x_2\right). \tag{2}$$

Согласно гипотезе прямых нормалей при формулировании граничных условий (2) необходимо задать четыре условия для каждой точки. В рассматриваемом случае, когда граница пластин описывается уравнением $x_1=0$, граничные условия могут принимать, например, следующий вид: края пластин смещаются вдоль оси Ox_3 свободно, при этом должны быть равны нулю изгибающие моменты и поперечные силы [6]:

$$M_{x_1}^{(j)}=-D_j\left(\frac{\partial^2u_{j3}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2u_{j3}}{\partial x_2^2}\right)=0,$$

$$D_j=\frac{E_jh_j^2}{12\left(1-\nu_j^2\right)},$$

$$Q_{x_1}^{(j)}=-D_j\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2u_{j3}.$$

Определяющими уравнениями для упругого основания являются уравнения Ляме [14]. Из последних, следуя известным алгоритмам [15–17 и др.], получается представление волнового поля в упругой подложке с использованием матрицы Грина. В области контакта упругой подложки с плитами покрытия

$$\mathbf{u}\left(x_1,x_2,0\right)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{K}_0\left(\alpha_1,\alpha_2,0\right)\mathbf{G}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2, \tag{3}$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2.$$

Соотношение (3) запишем в виде

$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2). \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathrm{V}_2\mathbf{u}$, $\mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathrm{V}_2\mathbf{g}$ – трансформанты Фурье [18] векторов перемещений и напряжений по горизонтальным координатам в области контакта основания и покрытия, $\mathbf{K}_0$ – Фурье-символ матрицы Грина основания, V_2 – оператор двумерного преобразования с параметрами α_1,α_2.

Существуют различные методы построения символов матрицы Грина для слоистых (изотропных и анизотропных) и градиентных сред, возникающих в моделях сейсмоакустики и геофизики, для которых трудно или невозможно выписать Фурье-символ матрицы Грина в явном виде. Эти методы в большинстве своем основаны на применении интегрального подхода или дифференциального метода факторизации. В работе [15] описаны свойства символов матриц Грина $\mathbf{K}_0$ статических задач.

Применение к (1) преобразования Фурье по координате x_2 приводит систему к виду

$$\mathbf{R}_{0j}\left(\partial x_1,-\mathrm{i}\alpha_2\right)\bar{\mathbf{u}}_j\left(x_1,\alpha_2\right)-\mathbf{E}_j\bar{\mathbf{g}}_j\left(x_1,\alpha_2\right)=$$
$$=\bar{\mathbf{b}}_j\left(x_1,\alpha_2\right), \tag{5}$$
$$\alpha_2\in\mathrm{R},$$

где $x_1>0$ для $j=1$ и $x_1<0$ для $j=2$, $\bar{\mathbf{u}}_j\left(x_1,\alpha_2\right)=\mathrm{V}\mathbf{u}_j\left(x_1,x_2\right)$, $\bar{\mathbf{g}}_j\left(x_1,\alpha_2\right)=\mathrm{V}\mathbf{g}_j\left(x_1,x_2\right)$, $\bar{\mathbf{b}}_j\left(x_1,\alpha_2\right)=\mathrm{V}\mathbf{b}_j\left(x_1,x_2\right)$, V – оператор двумерного преобразования Фурье.

Рассмотрим однородную систему, соответствующую (5), и найдем ее общее решение. Рассмотрим векторы вида $\mathbf{Y}_{0j}=\left\{\overline{u}_{j1},\overline{u}_{j1}',\overline{u}_{j2},\overline{u}_{j2}'\right\}$. Здесь использовано обозначение $\overline{u}_{jk}'=\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}_{jk}}{\mathrm{d}x_1}$ ($j,k=1,2$). Тогда первые два уравнения представляются в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}_{0j}}{\mathrm{d}x_1}=\mathbf{A}_{0j}\mathbf{Y}_{0j}.$$

Двукратные корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A}_{0j}-\gamma\mathbf{I})=0$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\gamma_{j1}=\lambda$, $\gamma_{j2}=-\lambda$, $\lambda=|\alpha_2|$.

Третье уравнение принимает вид

$$\varepsilon_{j3}\left(\overline{u}_{j3}^{(\mathrm{IV})}-2\alpha_2^2\overline{u}_{j3}''+\alpha_2^4\overline{u}_{j3}\right)=0,$$

характеристическое уравнение также имеет два двукратных корня: $\xi_{j1}=\lambda$, $\xi_{j2}=-\lambda$.

Исходя из условия ограниченности на бесконечности, общие решения однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно выписать в форме

$$\overline{\mathbf{u}}_{0j}=\sum_{k=1}^{2}C_{jk}(\alpha_2)\overline{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1,\alpha_2),$$

$$\overline{\mathbf{v}}_k^{(j)}=\left\{\overline{v}_{km}^{(j)}\right\},\ \overline{v}_{km}^{(j)}=f_{km}^{(j)}\mathrm{e}^{\mp\lambda x_1}\quad\left(m=\overline{1,3}\right),$$

$f_{1m}^{(j)}$ линейно зависят от x_1, а через $C_{jk}=C_{jk}(\alpha_2)$ обозначены произвольные функции $j,k=1,2$. Везде в работе для $j=1$ выбирается верхний знак, а для $j=2$ – нижний знак в символах «±», «∓».

Общие решения (5) для правой (j = 1) и левой плит (j = 1) примут вид

$$\begin{gathered}\overline{\mathbf{u}}_j(x_1,\alpha_2)=\mathrm{V}^{-1}(x_1)\Big[\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\times\\ \times\left(\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j+\mathbf{B}_j\right)\Big]+\sum_{k=1}^{2}C_{jk}(\alpha_2)\overline{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1,\alpha_2).\end{gathered}\tag{6}$$

В (6)

$$\mathbf{G}_j=\mathrm{V}(\alpha_1)\overline{\mathbf{g}}_j(x_1,\alpha_2)\equiv\mathrm{V}_2\mathbf{g}_j(x_1,x_2),$$

$$\mathbf{B}_j=\mathrm{V}_2\mathbf{b}_j(x_1,x_2),$$

$$\mathbf{R}_{0j}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)=\mathrm{V}_2(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{R}_{0j}(\partial x_1,\partial x_2)=$$

$$=-\begin{pmatrix}\alpha_1^2+\varepsilon_{j1}\alpha_2^2 & \varepsilon_{j2}\alpha_1\alpha_2 & 0\\ \varepsilon_{j2}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2+\varepsilon_{j1}\alpha_1^2 & 0\\ 0 & 0 & -\varepsilon_{j3}\alpha^4\end{pmatrix},$$

$$\alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2,$$

$\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)$ – матрица, обратная к $\mathbf{R}_{0j}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)$.

Для дальнейшего решения применим к (6) преобразование Фурье по переменной x_1 для соответствующих правой и левой плитам областей, получим выражения для интегральных характеристик смещений поверхности

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_j(\alpha_1,\alpha_2)=\Big\{\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\Big[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j(\alpha_1,\alpha_2)+\\ +\mathbf{B}_j(\alpha_1,\alpha_2)\Big]\Big\}^{\pm}+\sum_{k=1}^{2}C_{jk}(\alpha_2)\mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1,\alpha_2),\end{gathered}\tag{7}$$

где $\mathbf{V}_k^{(j)}=\mathrm{V}(\alpha_1)\overline{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1,\alpha_2)$.

Символ «+» в верхнем индексе указывает на регулярность функции в верхней полуплоскости комплексной переменной α_1, «–» – в нижней. Чтобы факторизовать выражения относительно вещественной оси в виде суммы по переменной α_1, обратим внимание на тот факт, что

$$\begin{gathered}\left\{\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j+\mathbf{B}_j\right]\right\}^{\pm}=\\ =\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j+\mathbf{B}_j\right]-\\ -\left\{\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j+\mathbf{B}_j\right]\right\}^{\mp}.\end{gathered}$$

Используя теорию вычетов [19], результат факторизации можно представить в виде

$$\begin{gathered}\left\{\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j+\mathbf{B}_j\right]\right\}^{\mp}=\\ =\mathbf{R}_{0j1}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)+\mathbf{B}_j(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right]+\\ +\mathbf{R}_{0j2}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_{j,\alpha_1}'(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)+\mathbf{B}_{j,\alpha_1}'(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right].\end{gathered}\tag{8}$$

В (8) введены обозначения

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_{0j1}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1\mp\mathrm{i}\lambda)^{-1}\operatorname*{Res}_{\eta_1=\pm i\lambda}\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\eta_1,-\mathrm{i}\alpha_2)+\\ +(\alpha_1\mp\mathrm{i}\lambda)^{-2}\left[\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\eta_1,-\mathrm{i}\alpha_2)(\eta_1\mp\mathrm{i}\lambda)^2\right]\Big|_{\eta_1=\pm\mathrm{i}\lambda},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_{0j2}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=\\ =(\alpha_1\mp\mathrm{i}\lambda)^{-1}\left[\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\eta_1,-\mathrm{i}\alpha_2)(\eta_1\mp\mathrm{i}\lambda)^2\right]\Big|_{\eta_1=\pm\mathrm{i}\lambda},\end{gathered}$$

$$\mathbf{G}_{j,\alpha_1}'(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{G}_j(\alpha_1,\alpha_2)}{\mathrm{d}\alpha_1}\right|_{\alpha_1=\pm i\lambda},$$

$$\mathbf{B}_{j,\alpha_1}'(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}_j(\alpha_1,\alpha_2)}{\mathrm{d}\alpha_1}\right|_{\alpha_1=\pm\mathrm{i}\lambda}.$$

С учетом (8) для образов Фурье перемещений $\mathbf{U}_j(\alpha_1,\alpha_2)$ из (7) будем иметь

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_j(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\Big[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j(\alpha_1,\alpha_2)+\\ +\mathbf{B}_j(\alpha_1,\alpha_2)\Big]+\sum_{k=1}^{2}C_{jk}(\alpha_2)\mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1,\alpha_2)-\\ -\mathbf{R}_{0j1}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)+\mathbf{B}_j(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right]-\\ -\mathbf{R}_{0j2}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_{j,\alpha_1}'(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)+\mathbf{B}_{j,\alpha_1}'(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right].\end{gathered}\tag{9}$$

На следующем этапе используются условия идеального контакта покрытия и подложки, которые в трансформантах Фурье примут вид

$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{U}_1(\alpha_1,\alpha_2) + \mathbf{U}_2(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{G}_1(\alpha_1,\alpha_2) + \mathbf{G}_2(\alpha_1,\alpha_2).$$

Тогда для контактных напряжений $\mathbf{G}_j(\alpha_1,\alpha_2)$ с учетом (4) получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{KG}_1(\alpha_1,\alpha_2) + \mathbf{KG}_2(\alpha_1,\alpha_2) = \\
= \sum_{j=1}^{2} \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\left[\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j(\alpha_1,\alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1,\alpha_2)\right] + \\
+\sum_{k=1}^{2} C_{1k}(\alpha_2)\mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2) + \\
+\sum_{k=1}^{2} C_{2k}(\alpha_2)\mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2) - \qquad (10) \\
-\mathbf{R}_{011}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_1\mathbf{G}_1(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \mathbf{B}_1(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right] - \\
-\mathbf{R}_{021}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_2\mathbf{G}_2(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \mathbf{B}_2(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right] - \\
-\mathbf{R}_{012}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_1\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \mathbf{B}'_{1,\alpha_1}(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right] - \\
-\mathbf{R}_{022}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left[\mathbf{E}_2\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \mathbf{B}'_{2,\alpha_1}(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right].
\end{gathered}$$

Сгруппировав слагаемые, содержащие функции $\mathbf{G}_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $\mathbf{G}_2(\alpha_1,\alpha_2)$, обладающие определенной регулярностью в комплексной плоскости α_1,

$$\mathbf{G}_1(\alpha_1,\alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\mathbf{G}_2(\alpha_1,\alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-(\alpha_1,\alpha_2),$$

и вводя обозначения

$$\mathbf{K}_{0j}(\alpha_1,\alpha_2) = \pm\left[\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2) - \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\mathbf{E}_j\right],$$

из (10) получим систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered}
\mathbf{G}_1^+ + \tilde{\mathbf{K}}_0\mathbf{G}_2^- = \mathbf{B}_0(\alpha_1,\alpha_2) + \\
\sum_{k=1}^{2}\left[C_{1k}(\alpha_2)\mathbf{N}_{1k}(\alpha_1,\alpha_2) + \right. \qquad (11) \\
\left. + C_{2k}(\alpha_2)\mathbf{N}_{2k}(\alpha_1,\alpha_2)\right] - \\
-\mathbf{P}_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{G}_1(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \mathbf{P}_{21}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{G}_2(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \\
-\mathbf{P}_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \mathbf{P}_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2).
\end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}_0(\alpha_1,\alpha_2) = -\mathbf{K}_{01}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{K}_{02}(\alpha_1,\alpha_2), \\
\mathbf{B}_0 = \mathbf{K}_{01}^{-1}\sum_{j=1}^{2}\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_1,-\mathrm{i}\alpha_2)\mathbf{B}_j(\alpha_1,\alpha_2) - \\
-\mathbf{K}_{01}^{-1}\sum_{j=1}^{2}\left[\mathbf{R}_{0j1}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}_j(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \right. \\
\left. + \mathbf{R}_{0j2}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}'_{j,\alpha_1}(\pm\mathrm{i}\lambda,\alpha_2)\right], \\
\mathbf{N}_{jk}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_{01}^{-1}\mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1,\alpha_2), \\
\mathbf{P}_{jl}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_{01}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{R}_{0jl}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{E}_j.
\end{gathered}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА – ХОПФА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАЗОВ ФУРЬЕ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И СМЕЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ

Система матрично-функциональных уравнений может быть решена методом факторизации Винера – Хопфа, реализация схемы которого [18] приводит (11) к виду

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}_{0+}^{-1}\mathbf{G}_1^+ = \{\mathbf{D}_0\}^+ - \{\mathbf{P}_{11}\}^+\mathbf{G}_1(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \\
-\{\mathbf{P}_{21}\}^+\mathbf{G}_2(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \{\mathbf{P}_{12}\}^+\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \\
-\{\mathbf{P}_{22}\}^+\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \qquad (12) \\
+\sum_{k=1}^{2}\left[C_{1k}(\alpha_2)\{\mathbf{M}_{1k}\}^+ + C_{2k}(\alpha_2)\{\mathbf{M}_{2k}\}^+\right],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}_{0-}\mathbf{G}_2^- = \{\mathbf{D}_0\}^- - \{\mathbf{P}_{11}\}^-\mathbf{G}_1(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \\
-\{\mathbf{P}_{21}\}^-\mathbf{G}_2(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \qquad (13) \\
-\{\mathbf{P}_{12}\}^-\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \{\mathbf{P}_{22}\}^-\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \\
+\sum_{k=1}^{2}\left[C_{1k}(\alpha_2)\{\mathbf{M}_{1k}\}^- + C_{2k}(\alpha_2)\{\mathbf{M}_{2k}\}^-\right].
\end{gathered}$$

В (12), (13) использован результат факторизации матрицы-функции $\mathbf{S}_0(\alpha_1,\alpha_2)$ параметру α_1 в виде произведения

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}_0(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{S}_{0+}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{S}_{0-}(\alpha_1,\alpha_2), \\
\mathbf{D}_0(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{S}_{0+}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}_0(\alpha_1,\alpha_2), \\
\mathbf{M}_{jl}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{S}_{0+}^{-1}\mathbf{N}_{jl}(\alpha_1,\alpha_2),\ j,l = 1,2.
\end{gathered}$$

Из (12), (13) выразим трансформанты Фурье контактных напряжений $\mathbf{G}_j^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)$

$$\begin{gathered}
\mathbf{G}_j^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{G}_j^0(\alpha_1,\alpha_2) - \mathbf{Q}_{11}^{\pm}\mathbf{G}_1(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \\
-\mathbf{Q}_{21}^{\pm}\mathbf{G}_2(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \qquad (14) \\
-\mathbf{Q}_{12}^{\pm}\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) - \mathbf{Q}_{22}^{\pm}\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-\mathrm{i}\lambda,\alpha_2) + \\
+\sum_{k=1}^{2}\left[C_{1k}(\alpha_2)\mathbf{G}_{1k}^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2) + C_{2k}(\alpha_2)\mathbf{G}_{2k}^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)\right],
\end{gathered}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{G}_1^0(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{S}_{0+}\{\mathbf{D}_0\}^+,\quad \mathbf{G}_2^0(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{S}_{0-}^{-1}\{\mathbf{D}_0\}^-,$$

$$\mathbf{G}_{nk}^+(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{S}_{0+}(\alpha_1,\alpha_2)\{\mathbf{M}_{nk}\}^+,$$

$$\mathbf{G}_{nk}^-(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{S}_{0-}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\{\mathbf{M}_{nk}\}^-,$$

$$\mathbf{Q}_{nl}^+(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{S}_{0+}(\alpha_1,\alpha_2)\{\mathbf{P}_{nl}\}^+,$$

$$\mathbf{Q}_{nl}^-(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{S}_{0-}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\{\mathbf{P}_{nl}\}^-,\ k,l,n=1,2.$$

Для нахождения неизвестных значений вектор-функций $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda,\alpha_2)$, $\mathbf{G}'_{j,\alpha 1}(\pm i\lambda,\alpha_2)$, присутствующих в выражении (14), подставим $i\lambda$ вместо α_1 в выражение для $\mathbf{G}_1^+(\alpha_1,\alpha_2)$ и их производных по α_1 и $-i\lambda$ – в выражения для $\mathbf{G}_2^-(\alpha_1,\alpha_2)$ и их производных. В результате подстановки получим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda,\alpha_2)$, $\mathbf{G}'_{j,\alpha 1}(\pm i\lambda,\alpha_2)$. Затем внесем решения СЛАУ в соотношения (14), последние будут определять трансформанты Фурье напряжений в области контакта плит покрытия с упругим основанием. Тогда $\mathbf{U}_j(\alpha_1,\alpha_2)$ из (9)

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_j(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{U}_j^0(\alpha_1,\alpha_2)+\\ +\sum_{k=1}^{2}C_{1k}(\alpha_2)\mathbf{U}_{jk}^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)+\\ +\sum_{k=1}^{2}C_{2k}(\alpha_2)\mathbf{U}_{jk}^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2),\end{gathered}\tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_j^0(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{R}_{0j}^{-1}\mathbf{E}_j\left[\mathbf{G}_j^0(\alpha_1,\alpha_2)+\mathbf{B}_j(\alpha_1,\alpha_2)\right]-\\ -\mathbf{R}_{0j1}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}_j(\pm i\lambda,\alpha_2)-\\ -\mathbf{R}_{0j2}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda,\alpha_2)-\\ -\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\mathbf{E}_j\left[\mathbf{Q}_{11}^{\pm}\mathbf{G}_1(i\lambda,\alpha_2)+\right.\\ +\mathbf{Q}_{21}^{\pm}\mathbf{G}_2(-i\lambda,\alpha_2)+\\ \left.-\mathbf{Q}_{12}^{\pm}\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda,\alpha_2)+\mathbf{Q}_{22}^{\pm}\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda,\alpha_2)\right]-\\ -\mathbf{R}_{0j1}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{E}_j\mathbf{G}_j(\pm i\lambda,\alpha_2)-\\ -\mathbf{R}_{0j2}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{E}_j\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda,\alpha_2),\\ \mathbf{U}_{jk}^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{R}_j^{-1}\mathbf{E}_j\mathbf{G}_{1k}^{\pm}+\mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2),\\ \mathbf{U}_{jk}^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{R}_j^{-1}\mathbf{E}_j\mathbf{G}_{2k}^{\pm}+\mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2).\end{gathered}$$

Таким образом, из (14), (15) определяются неизвестные величины $\mathbf{G}_j(\alpha_1,\alpha_2)$, $\mathbf{U}_j(\alpha_1,\alpha_2)$ через нагрузку на лицевой поверхности. Представления (14), (15) содержат произвольные $C_{jk}(\alpha_2)$, $j,k=1,2$, которые определяются из условий (2).

ЗАДАЧА ДЛЯ ДЛИННОПЕРИОДНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ТРЕСНУВШИМ ПОКРЫТИЕМ

Исследуются установившиеся относительно положения равновесия гармонические колебания системы, характер которых позволяет перейти к решению задач относительно комплексных амплитуд.

Вектор комплексной амплитуды перемещений $\mathbf{u}_j(x_1,x_2)$ точек срединной плоскости j-й плиты удовлетворяет уравнению [4; 9]

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_j(\partial x_1,\partial x_2,\omega_2)\mathbf{u}_j(x_1,x_2)-\mathbf{E}_j\mathbf{g}_j(x_1,x_2)=\mathbf{b}_j(x_1,x_2),\\ (x_1,x_2)\in\mathbf{\Omega}_j,\end{gathered}\tag{16}$$

где элементы $\mathbf{R}_j$, $\mathbf{E}_j$ зависят от параметров плиты,

$$R_{11}^j=R_{11}^{0j}+\varepsilon_{j4},\quad R_{22}^j=R_{22}^{0j}+\varepsilon_{j4},$$

$$R_{12}^j=R_{21}^j=R_{21}^{0j},\quad R_{13}^j=R_{23}^j=R_{31}^j=R_{32}^j=0,$$

$$R_{33}^j=R_{33}^{0j}\varepsilon_{j3}-\varepsilon_{j4},\quad \varepsilon_{j4}\equiv\varepsilon_{j4}(\omega)=\omega^2\rho_j\left(1-\nu_j^2\right)E_j^{-1}.$$

Здесь неизвестные комплексные амплитуды $\mathbf{u}_j(x_1,x_2)\equiv\mathbf{u}_j(x_1,x_2,\omega)$, $\mathbf{g}_j(x_1,x_2)\equiv\mathbf{g}_j(x_1,x_2,\omega)$.

Выражения (16) включают зависящие от ω^2 члены. В основе построения функций влияния (соотношения (3)) лежат уравнения Ляме, описывающие волновое поле подложки. В уравнениях движения для гармонических колебаний [14] зависимость от частоты описывается слагаемыми, содержащими множитель ω^2. Для построения приближенного решения динамической задачи для установившихся гармонических колебаний при малых значениях частоты введем разложение комплексных амплитуд напряжений и смещений в ряды по четным степеням ω:

$$\mathbf{u}_j(x_1,x_2,\omega)=\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2)+\mathbf{u}_{j1}(x_1,x_2)\omega^2+o(\omega^2),\tag{17}$$

$$\mathbf{g}_j(x_1,x_2,\omega)=\mathbf{g}_{j0}(x_1,x_2)+\mathbf{g}_{j1}(x_1,x_2)\omega^2+o(\omega^2).\tag{18}$$

Полагая ω малой величиной, можно ограничиться, например, членами второго порядка.

Подставим представления (17), (18) в (16), в результате приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_{j0}(\partial x_1,\partial x_2)\left(\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2)+\mathbf{u}_{j1}(x_1,x_2)\omega^2\right)-\\ -\omega^2\rho_j\frac{1-\nu_j^2}{E_j}\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2)-\mathbf{E}_j\mathbf{g}_{j0}(x_1,x_2)-\\ -\mathbf{E}_j\mathbf{g}_{j1}(x_1,x_2)\omega^2+o(\omega^2)=\mathbf{b}_j(x_1,x_2),\ j=1,2.\end{gathered}\tag{19}$$

При этом уравнения Ляме [14] запишутся в виде

$$(\lambda + \mu)\mathrm{graddiv}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})\omega^2) + \\ + \mu\Delta(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})\omega^2) + \rho\omega^2\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + o(\omega^2) = 0. \quad (20)$$

Выполняются условия идеального контакта плит с упругой подложкой

$$\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1,x_2)\omega^2 + o(\omega^2) = \\ = \mathbf{u}_0(x_1,x_2) + \mathbf{u}_1(x_1,x_2)\omega^2 + o(\omega^2),\ (x_1,x_2) \in \Omega_j,$$

$$\mathbf{g}_{j0}(x_1,x_2) + \mathbf{g}_{j1}(x_1,x_2)\omega^2 + o(\omega^2) = \\ = \mathbf{g}_0(x_1,x_2) + \mathbf{g}_1(x_1,x_2)\omega^2 + o(\omega^2),\ (x_1,x_2) \in \Omega_j,\ j = 1,2.$$

На стыке плит условия (2) примут вид

$$\sum_{j=1}^{2}\mathbf{L}_j\left(\partial x_1,\partial x_2\right)\left[\mathbf{u}_{j0}\left(x_1,x_2\right) + \right. \\ \left. +\mathbf{u}_{j1}\left(x_1,x_2\right)\omega^2 + o\left(\omega^2\right)\right] = \mathbf{f}\left(x_2\right). \quad (21)$$

В результате выделения в (19)–(21) составляющих при одинаковых степенях частоты приходим к решаемым последовательно задачам для $\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2)$ и $\mathbf{u}_{j1}(x_1,x_2)$. Так, для $\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2)$ имеем задачу, совпадающую с рассмотренной статической задачей:

$$\mathbf{R}_{j0}(\partial x_1,\partial x_2)\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2) - \mathbf{E}_j\mathbf{g}_{j0}(x_1,x_2) = \mathbf{b}_j(x_1,x_2), \\ (x_1,x_2) \in \Omega_j,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\mathbf{L}_j\left(\partial x_1,\partial x_2\right)\mathbf{u}_{j0}\left(x_1,x_2\right) = \mathbf{f}\left(x_2\right),\ \ x_2 \in \mathrm{R},$$

$$\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2) = \mathbf{u}_0(x_1,x_2),\ \mathbf{g}_{j0}(x_1,x_2) = \mathbf{g}_0(x_1,x_2), \\ (x_1,x_2) \in \Omega_j,\ j = 1,2,$$

где

$$\mathbf{u}_0\left(x_1,x_2\right) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{K}_0\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\mathbf{G}_0\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right)}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2.$$

Далее для $\mathbf{u}_{j1}(x_1,x_2)$ уравнения принимают вид

$$\mathbf{R}_{j0}\left(\partial x_1,\partial x_2\right)\mathbf{u}_{j1}\left(x_1,x_2\right) - \mathbf{E}_j\mathbf{g}_{j1}\left(x_1,x_2\right) = \\ = \rho_j\frac{1-\nu_j^2}{E_j}\mathbf{u}_{j0}\left(x_1,x_2\right),\quad \left(x_1,x_2\right) \in \Omega_j,$$

где $\mathbf{u}_{j0}(x_1,x_2)$ определяется из предыдущей задачи.

Представление (3) строится для неоднородных стационарных уравнений Ляме

$$(\lambda + \mu)\mathrm{graddiv}\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + \mu\Delta\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = -\rho\mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

Так как оператор рассматриваемой статической краевой задачи в пространстве функций Соболева положительно определен, используя результаты, полученные в работе [15], можно доказать, что при малых значениях ω рассматриваемая краевая задача разрешима и метод последовательных приближений для нее сходится.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из сформулированных задач в работе представлен метод изучения математических моделей геофизических структур в виде упругого основания с покрытием, имеющим разлом.

Топологический метод, применяемый в том числе к задачам составных покрытий, описанный в работе [9], является универсальным и позволяет рассматривать границы произвольной конфигурации. Однако применение этого метода даже для классических границ весьма сложно. В данной работе для плит с прямолинейными границами предложен подход, обеспечивающий возможность более быстрого построения представлений основных характеристик напряженно-деформированного состояния блочной структуры.

Описан алгоритм решения статической задачи для протяженных покрытий, контактирующих вдоль прямолинейного разлома. Рассмотренная граничная задача привела к новому типу функциональных уравнений – нагруженным уравнениям Винера – Хопфа. Построено решение системы функциональных уравнений. В отличие от традиционных функциональных уравнений полученные в работе содержат значения неизвестных вектор-функций, нуждающиеся в дополнительном определении. В реализованном алгоритме они могут быть определены из СЛАУ, построенной на основе матрично-функциональных уравнений задачи.

Кроме того, рассмотрен подход к моделированию системы, включающей в себя генератор колебаний низкой частоты. Для малых частот предлагается переходить к последовательному решению нескольких статических задач.

Получены аналитические представления интегральных характеристик напряжений и перемещений в области контакта покрытия и основания, имеющие большое значение для понимания процессов, протекающих на границах составных сред. Однако наличие аналитических решений и интегральных соотношений, описывающих перемещения и напряжения в рассмотренных моделях, не гарантирует возможности широкого применения этих результатов в инженерной практике. К основным сложностям предлагаемого метода относится процедура факторизации матриц-функций в виде суммы и произведения. Алгоритмы приближенной факторизации для матриц-функций описаны, например, в работе [20]. В дальнейшем планируется оптимизация разработанных алгоритмов построения приближенных решений для выработки рекомендаций по практическому их использованию в значимом для практики диапазоне параметров.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Кубанского научного фонда № 22-21-20032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Канониди К.Х., Лиходеев Д.В. 2017. О гравимагнитных возмущениях, предваряющих сейсмические события. *Доклады Академии наук*. 475(4): 444–447. doi: 10.7868/S0869565217220182
2. Собисевич А.Л. 2018. Гравитомагнетизм. Результаты обсерваторских наблюдений. *Доклады Академии наук*. 480(5): 587–591. doi: 10.7868/S0869565218050183
3. Линьков Е.М., Петрова Л.Н., Савина Н.Г., Яновская Т.Б. 1982. Сверхдлиннопериодные колебания Земли. *Доклады Академии наук СССР*. 262(2): 321–324.
4. Babeshko V.A., Telyatnikov I.S., Pavlova A.V., Kolesnikov M.N. 2023. About one approach in prevention of the emerging dangerous phenomena caused by the existence of defect in continuous media. In: *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials. Vol. 185*. Cham, Springer: 57–76. doi: 10.1007/978-3-031-18564-9_5
5. Вольмир А.С. 1972. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М., Наука: 432 с.
6. Гольденвейзер А.Л. 1976. *Теория упругих тонких оболочек*. М., Наука: 512 с.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. 1983. *Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками*. М., Наука: 488 с.
8. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. 1980. *Контактные задачи теории пластин и оболочек*. М., Машиностроение: 411 с.
9. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. 2013. Cracks in coatings in static problems of seismology and nanomaterials. *Doklady Physics*. 58(11): 500–504. doi: 10.1134/S1028335813110062
10. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. 2016. Неклассические модели теории пластин и оболочек. *Прикладная механика и теоретическая физика*. 57(5): 5–14. doi: 10.15372/PMTF20160501
11. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2010. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*. 80(1): 73–92. doi: 10.1007/S00419-009-0365-3
12. Chandrashekhara K. 2001. *Theory of Plates*. Hyderabad, Universities Press: 410 p.
13. Telyatnikov I. 2019. Modeling of deformation processes in lithospheric structures during their static interaction. *Thermal Science.* 23(Supplement 2): S591–S597. doi: 10.2298/TSCI19S2591T
14. Новацкий В. 1975. *Теория упругости*. М., Мир: 872 с.
15. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. 1974. *Неклассические смешанные задачи теории упругости*. М., Наука: 455 с.
16. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. 1989. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М., Наука: 344 с.
17. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. 1999. *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах*. М., Научный мир: 248 с.
18. Noble B. 1958. *Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations*. New York, Pergamon Press: 246 p.
19. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. 1973. *Методы теории функций комплексного переменного*. М., Наука: 749 с.
20. Ворович И.И., Бабешко В.А. 1979. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М., Наука: 319 с.

REFERENCES

1. Sobisevich A.L., Sobisevich L.E., Kanonidi K.Kh., Likhodeev D.V. 2017. Gravimagnetic perturbations preceding earthquakes. *Doklady Earth Sciences*. 475(2): 891–894. doi: 10.1134/S1028334X17080086.
2. Sobisevich A.L. 2018. Gravimagnetism: results of observatory monitoring. *Doklady Earth Sciences*. 480(2): 783–787. doi: 10.1134/S1028334X1806017X
3. Linkov E.M., Petrova L.N., Savina N.G., Yanovskaya T.B. 1982. [Superlong period oscillations of the Earth]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 262(2): 321–324. (In Russian).
4. Babeshko V.A., Telyatnikov I.S., Pavlova A.V., Kolesnikov M.N. 2023. About one approach in prevention of the emerging dangerous phenomena caused by the existence of defect in continuous media. In: *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials. Vol. 185*. Cham, Springer: 57–76. doi: 10.1007/978-3-031-18564-9_5
5. Vol'mir A.S. 1972. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek.* [*Nonlinear dynamics of plates and shells*]. Moscow, Nauka: 432 p. (In Russian).
6. Gol'denveyzer A.L. 1976. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek.* [*Theory of elastic thin shells*]. Moscow, Nauka: 512 p. (In Russian).
7. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. 1983. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami*. [*Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers*]. Moscow, Nauka: 488 p. (In Russian).
8. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. 1980. *Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek.* [*Contact problems in the theory of plates and shells*]. Moscow, Mashinostroenie: 411 p. (In Russian).
9. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. 2013. Cracks in coatings in static problems of seismology and nanomaterials. *Doklady Physics*. 58(11): 500–504. doi: 10.1134/S1028335813110062

10. Annin B.D., Volchkov Yu.M. 2016. Nonclassical models of the theory of plates and shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(5): 769–776. doi: 10.1134/S0021894416050011

11. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2010. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*. 80(1): 73–92. doi: 10.1007/S00419-009-0365-3

12. Chandrashekhara K. 2001. *Theory of Plates*. Hyderabad, Universities Press: 410 p.

13. Telyatnikov I. 2019. Modeling of deformation processes in lithospheric structures during their static interaction. *Thermal Science*. 23(Supplement 2): S591–S597. doi: 10.2298/TSCI19S2591T

14. Nowacki W. 1975. *Teoriya uprugosti*. [*Theory of elasticity*]. Moscow, Mir: 872 p. (In Russian).

15. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. 1974. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti*. [*Non-classical mixed problems of elasticity theory*]. Moscow, Nauka: 455 p. (In Russian).

16. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. 1989. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred*. [*Dynamics of inhomogeneous linear elastic media*]. Moscow, Nauka: 344 p. (In Russian).

17. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. 1999. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh*. [*Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media*]. Moscow, Nauchnyy mir: 248 p. (In Russian).

18. Noble B. 1958. *Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations*. New York, Pergamon Press: 246 p.

19. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. 1973. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo*. [*Methods of the theory of functions of a complex variable*]. Moscow, Nauka: 749 p. (In Russian).

20. Vorovich I.I., Babeshko V.A. 1979. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey*. [*Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains*]. Moscow, Nauka: 319 p. (In Russian).

Поступила 09.06.2023