

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640230401

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ, ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СВОЙСТВА ПИРОПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИМГОНИИ

© 2023 г. Т.И. Белянкова¹, чл.-корр. РАН В.В. Калинин¹, Л.В. Ломакина¹

Аннотация. Работа направлена на исследование влияния начальных механических, температурных и электростатических воздействий на изменение деформированного состояния и физических свойств термоэлектростатических материалов, относящихся в естественном состоянии к материалам класса симметрии 6mm гексагональной симгонии. Предполагается, что наведенное в материале начально-деформированное состояние однородно, начальные тепловые воздействия не превышают температуры фазовых переходов, начальное электростатическое поле задано вектором напряженности. Исследование основано на использовании линеаризованных определяющих соотношений, уравнений движения термоэлектростатических сред, уравнений электростатики и уравнений распространения тепла, полученных в рамках теории наложения малых деформаций на конечные. Приведены матричные представления тензоров упругих и пьезоэлектрических модулей преднапряженного материала, наглядно иллюстрирующие влияние начальных как механических и тепловых, так и электростатических воздействий на свойства пиро-пьезоэлектрического материала. На примере CdSe исследовано раздельное и совместное влияние вида и величины начальных напряжений, электрических и тепловых воздействий на характер наводимых деформаций и трансформацию свойств материала. Определены виды механических воздействий, приводящих к максимальным значениям электрической индукции. Показано влияние характера тепловых воздействий в отсутствие начальных механических напряжений на величину и направленность вектора электрической индукции. Выявлены закономерности влияния начального электростатического поля большой напряженности на упругие и пьезоэлектрические свойства материала. Результаты оформлены в виде графиков и могут представлять определенный интерес при разработке, проектировании и оптимизации пиро-пьезоэлектрических материалов, используемых при создании микро- и наноразмерных приборов и устройств.

Ключевые слова: термоэлектростатическая упругость, начальные механические напряжения, предварительный нагрев, начально-деформированное состояние, напряженность электростатического поля, электрическая индукция.

THE INFLUENCE OF INITIAL MECHANICAL, ELECTROSTATIC AND TEMPERATURE EFFECTS ON THE PROPERTIES OF PYROPIEZOELECTRICS OF THE HEXAGONAL SYSTEM

T.I. Belyankova¹, Corresponding Member RAS V.V. Kalinchuk¹, L.V. Lomakina¹

Abstract. The work is aimed at studying the effect of initial mechanical, temperature and electrostatic influences on the change in the deformed state and physical properties of thermoelectroelastic materials, which in their natural state belong to the materials of the 6mm hexagonal symmetry class. It is assumed that the initial deformed state induced in the material is homogeneous, the initial temperature effects do not exceed the temperature of phase transitions, and the initial electrostatic field is specified by the strength vector. The study

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: tbelen415@mail.ru

is based on the use of linearized constitutive relations, equations of motion of thermoelectroelastic media, electrostatic equations and heat propagation equations obtained within the framework of the theory of imposing small deformations on finite ones. Matrix representations of tensors of elastic and piezoelectric moduli of a prestressed material are presented, clearly illustrating the influence of initial mechanical and temperature, as well as electrostatic influences on the properties of a pyroelectric material. Within the framework of the proposed approach, using CdSe as an example, the separate and combined influence of the type and magnitude of initial mechanical stresses, electrical and thermal effects on the nature of induced deformations and transformation of the properties of the material was studied. The types of mechanical influences leading to maximum values of electrical induction are determined. The influence of the nature of temperature effects in the absence of initial mechanical stresses on the magnitude and direction of the electrical induction vector is shown. The patterns of influence of the initial high-intensity electrostatic field on the elastic and piezoelectric properties of the material have been revealed. The research results are presented in the form of graphs and may be of particular interest in the development, design and optimization of pyroelectric materials used in the creation of new micro- and nano-sized devices.

Keywords: thermoelectroelasticity, initial mechanical stress, preheating, initial deformed state, electrostatic field strength, electrical induction.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание привлечено к разработке устройств с участием пьезоэлектрических, пьезомагнитных и пьезоэлектрических материалов, применяемых в высокотехнологичных отраслях промышленности (приводы для активного управления, ультразвуковые генераторы, фильтры, термоакусто-пьезоэлектрические преобразователи энергии, датчики для обработки сигналов и т.д.). Одними из первых работ, в которых получены определяющие соотношения и уравнения движения термо-пьезоэлектрических кристаллов и пластин, сформулированы основные теоремы, изучены физические законы термо-пьезоэлектрических материалов, являются работы [1–3]. В статьях [4; 5] обобщена теория термо-пьезоэлектричества Миндлина в предположении конечной скорости распространения тепловых возмущений, построена обобщенная линейная термоупругая теория пьезоэлектрических сред. Позднее обобщенная теория была использована при исследовании особенностей распространения поверхностных волн в полуграниченных термоэлектроупругих средах. В работах [6; 7] исследованы фазовые скорости, коэффициенты затухания и удельные потери поверхностных волн в зависимости от частоты. В статьях [8; 9] изучаются задачи отражения и прохождения волн в пьезоэлектрической и пьезоэлектрической средах, получены математические выражения для электрических перемещений, напряжений, амплитуд и энергетических соотношений.

Для исследования смешанных задач динамики термоэлектроупругих сред с разрывными гранич-

ными условиями предложен метод, позволяющий изучать поведение материалов с покрытиями в условиях гармонических воздействий [10]. Покрытия предполагаются двумерными деформируемыми объектами с усредненными по толщине параметрами, которые находятся на трехмерной деформируемой подложке в виде слоя. Особое место занимает изучение особенностей распространения как поверхностных акустических, так и объемных волн в предварительно напряженных материалах. Так, в работах [11; 12] исследовано влияние начальных механических напряжений на распространение объемных волн и поверхностных акустических волн в составных однородных и неоднородных структурах из пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов. В статье [13] изучено влияние начальных напряжений на характеристики отражения плоских волн на свободной поверхности пьезотермоупругого композита. Влияние начальных напряжений учитывалось аддитивными составляющими в уравнениях движения, начально-деформированное состояние материала не рассматривалось. В ряде более ранних работ, в частности [14–16], в рамках модели гиперупругого сжимаемого материала показано существенное влияние начальной деформации на изменение физических свойств преднапряженных материалов, отсутствие характерной для естественного состояния симметрии упругих пьезо- и диэлектрических модулей, изменение скорости и характера распространения объемных и поверхностных упругих и электроупругих акустических волн. В статье [16] в рамках наложения малых деформаций на конечные проведена последовательная линеаризация опре-

деляющих соотношений и уравнений движения нелинейной механики электроупругой среды как в системе координат Лагранжа, связанной с естественной конфигурацией материала, так и в системе координат Эйлера, связанной с конфигурацией в преднапряженном состоянии. В работе [17] предложен численно-аналитический метод исследования ПАВ неоднородной предварительно напряженной электроупругой среды в виде однородного полупространства с неоднородным функционально-градиентным покрытием. Использование численных методов позволило построить интегральное представление, описывающее движение произвольной точки среды, и дисперсионное уравнение, решение которого определяет основные характеристики ПАВ. Полученные линеаризованные соотношения и предложенные подходы позволили детально исследовать влияние вида и величины начально-деформированного состояния, наведенного в материале за счет начальных механических и электростатических воздействий, на особенности поведения ПАВ в однородных и неоднородных составных электроупругих структурах. Влияние тепловых воздействий не учитывалось. В статье [18] в рамках теории наложения малых деформаций на конечные проведена последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики преднапряженной термоэлектроупругой среды. Удержание в термодинамическом потенциале членов второго порядка по деформациям, электрическому полю и отклонению температуры, с одной стороны, позволило получить достаточно простые и удобные для использования формулы, с другой стороны, дало возможность учесть влияние нелинейных эффектов воздействия тепла и механических деформаций на изменение исходных свойств материала.

Цель настоящей работы – изучить влияние характера и величины начальных механических, тепловых и электростатических воздействий на деформированное состояние термоэлектроупругого материала класса симметрии bmm гексагональной сингонии, изменение его упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается предварительно напряженная термоэлектроупругая среда, напряженно-деформированное состояние (НДС) которой однородно и

наводится за счет действия механических напряжений, электростатического поля и начальной температуры (среда предварительно нагрета или охлаждена) [2; 3; 18]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad (1)$$

$$\varphi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}, \quad \theta = T_1, \quad v_i = \text{const}.$$

Здесь $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ – радиус-векторы точки среды в НДС и в естественном состоянии (ЕС) соответственно, $v_i = 1 + \delta_i$, δ_i – главные относительные удлинения волокон, направленных вдоль координатных осей x_k , совпадающих в естественной конфигурации с декартовыми координатами, δ_{ij} – символ Кронекера, φ_0 – электрический потенциал, $\mathbf{E}_0$ – напряженность начального внешнего электростатического поля, T_1 – температура тела в НДС. Полагаем, что состояние

$$\mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \theta = T_0 \quad (2)$$

является состоянием с минимальной свободной энергией; $\mathbf{S}$, $\mathbf{W}$, θ – тензор деформации Коши – Грина, «материальный» вектор напряженности внешнего электрического поля и температура.

В рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечные динамика предварительно напряженного термоэлектроупругого тела в лагранжевой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 , связанной с ЕС, представляется линеаризованными уравнениями движения, вынужденной электростатики и теплопроводности [18]:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta} = \nabla_0 \cdot (\mathbf{\Pi} + \mathbf{m}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{h} + T_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

На поверхности термоэлектроупругого тела могут быть рассмотрены следующие граничные условия: механические на $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Theta} \Big|_{\sigma_1} = \mathbf{t}^* \Big|_{\sigma_1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} \Big|_{\sigma_2} = \mathbf{u}^* \Big|_{\sigma_2}, \quad (5)$$

электрические на $\sigma = \sigma_3 + \sigma_4$:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \Big|_{\sigma_3} = -\mathbf{g}^* \Big|_{\sigma_3}, \quad (6)$$

$$\varphi \Big|_{\sigma_4} = \varphi^* \Big|_{\sigma_4}, \quad (7)$$

тепловые на поверхности $\sigma = \sigma_5 + \sigma_6$:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \Big|_{\sigma_5} = -h^* \Big|_{\sigma_5}, \quad (8)$$

$$T \Big|_{\sigma_6} = T^* \Big|_{\sigma_6}. \quad (9)$$

Здесь ∇_0 – оператор Гамильтона; Θ – линейризованный тензор напряжений преднапряженной среды; ρ_0 – плотность недеформированного тела; $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор смещений; $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{t}^*$, $\mathbf{n}$ – векторы перемещений, напряжений и внешней нормали к поверхности среды соответственно, определенные в естественной системе координат (звездочкой отмечены заданные в соответствующей области величины); g^* , φ^* , h^* , T^* – плотность распределения заряда, электрический потенциал, поток тепла и температура соответственно.

Участвующие в представлении краевой задачи (3)–(9) линейризованные тензор напряжений Пиолы, тензор напряжений Пиолы – Максвелла, «материальный» вектор индукции, вектор потока тепла и энтропия Π , $\mathbf{m}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{h}$ и η определяются соотношениями (дифференцирование по координатам отмечено индексами после запятой):

$$\begin{aligned}\Pi_{lk} &= c_{lksp}^* u_{s,p} + e_{lkp}^* \varphi_{,p} - q_{lk}^* (T_1 - T_0), \\ m_{lk} &= \zeta_{lksp}^* u_{s,p} + \psi_{lkp}^* \varphi_{,p}, \\ d_l &= (e_{lsp}^* + \psi_{lsp}^*) u_{s,p} - \eta_{lp}^* \varphi_{,p} + p_l (T_1 - T_0), \\ h_l &= -\lambda_{ll} T_{,l}, \\ \eta &= q_{sp}^* u_{s,p} - p_m \varphi_{,m} + \frac{\rho_0 c_e}{T_0} (T_1 - T_0), \\ c_{lksp}^* &= P_{lk} \delta_{ks} + v_k v_s c_{lksp}, \quad e_{lsp}^* = v_s e_{lsp}, \\ \eta_{lp}^* &= \varepsilon^{(0)} J v_l^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp}, \quad q_{lk}^* = v_k q_{lk}, \\ \psi_{ijk}^* &= \varepsilon^{(0)} J v_i^{-1} v_k^{-1} [\delta_{ij} W_k v_k^{-1} - \delta_{jk} W_i v_i^{-1} - \delta_{ik} W_j v_j^{-1}], \\ \zeta_{lksp}^* &= \varepsilon^{(0)} J v_l^{-1} \left[\frac{1}{2} W_m^2 v_m^{-2} (v_k^{-1} \delta_{kp} \delta_{ls} - v_s^{-1} \delta_{lk} \delta_{sp}) + \right.\end{aligned}\quad (10)$$

$$\mathbf{c}^{\Pi*} = \begin{pmatrix} c_{11} v_1^2 + P_{11} & c_{12} v_1 v_2 & c_{13} v_1 v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} v_1 v_2 & c_{11} v_2^2 + P_{22} & c_{13} v_2 v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} v_1 v_3 & c_{13} v_2 v_3 & c_{33} v_3^2 + P_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} v_2 v_3 & c_{44} v_3^2 + P_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} v_2^2 + P_{33} & c_{44} v_2 v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} v_1 v_3 & c_{44} v_3^2 + P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} v_1^2 + P_{33} & c_{44} v_1 v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} v_1 v_2 & c_{66} v_2^2 + P_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} v_1^2 + P_{22} & c_{66} v_1 v_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

для e_{lkp}^* , участвующих в представлении Π_{lk} , и e_{lsp}^* , участвующих в представлении d_l^{Π} ,

$$\begin{aligned}& + v_p^{-1} \left(W_k v_k^{-1} (W_l v_l^{-1} \delta_{sp} - W_p v_p^{-1} \delta_{ls} - W_s v_s^{-1} \delta_{lp}) + \right. \\ & \left. + W_s v_s^{-1} (W_p v_p^{-1} \delta_{lk} - W_l v_l^{-1} \delta_{kp}) \right) \Big], \\ P_{ij} &= c_{ijkk} S_k - e_{ijk} W_k - (T_1 - T_0) q_{ij}, \\ S_k &= (v_k^2 - 1)/2, \quad J = v_1 v_2 v_3.\end{aligned}\quad (11)$$

Участвующие в выражениях (10) и (11) c_{lksp}^* – компоненты тензора IV ранга упругих констант II порядка, который характеризует линейную деформацию при постоянной температуре и электрическом поле; β_{ij} – компоненты тензора II ранга констант диэлектрической восприимчивости, связанные с компонентами тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} соотношениями $\varepsilon_{kn} = \varepsilon^{(0)} \delta_{kn} + \beta_{kn}$, $\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума; e_{ijk}^* – компоненты тензора III ранга – тензорные пьезоэлектрические константы II порядка, связанные с электроакустическими эффектами (изменение скорости акустических волн под действием приложенного электрического напряжения); q_{ij} – коэффициенты термоупругости; λ_{ij} – компоненты тензора коэффициентов удельной теплопроводности; p_k – компоненты вектора пьезоэлектричества; c_e – удельная теплоемкость; P_{ij} – компоненты тензора Кирхгофа.

Представим компоненты линейризованного тензора напряжений и «материального» вектора индукции в виде

$$\begin{aligned}\Theta_{lk} &= \Pi_{lk} + m_{lk}, \quad d_l = d_l^{\Pi} + d_l^m, \\ d_l^{\Pi} &= e_{lsp}^* u_{s,p} - \beta_{lp} \varphi_{,p} + p_l (T_1 - T_0), \\ d_l^m &= \psi_{lsp}^* u_{s,p} - \varepsilon^{(0)} J v_l^{-2} \delta_{lp} \varphi_{,p}.\end{aligned}\quad (12)$$

С учетом свойств материала и выражений (11) приведем более наглядное матричное представление $\mathbf{c}_{lksp}^*$:

$$\mathbf{e}^{\Pi*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31}v_1 \\ 0 & 0 & e_{31}v_2 \\ 0 & 0 & e_{33}v_3 \\ 0 & e_{15}v_3 & 0 \\ 0 & e_{15}v_2 & 0 \\ e_{15}v_3 & 0 & 0 \\ e_{15}v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{d*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}v_1 & e_{15}v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}v_2 & e_{15}v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{31}v_1 & e_{31}v_2 & e_{33}v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что в отличие от ЕС матрица $\mathbf{e}^{d*}$ в НДС уже не является транспонированной матрицей $\mathbf{e}^{\Pi*}$. Матричное представление для ζ_{lks}^* , ψ_{lks}^* и ψ_{lsp}^* имеет вид:

$$\zeta^{\mathbf{m}*} = \begin{pmatrix} -v_{231}E_1^2 & v_3E_{12} & v_2E_{13} & \varepsilon_0v_2E_2E_3 & \varepsilon_0v_3E_2E_3 & 0 & -v_{231}E_1E_3 & 0 & -v_{231}E_1E_2 \\ v_3E_{12} & -v_{132}E_2^2 & v_1E_{23} & 0 & -v_{132}E_2E_3 & \varepsilon_0v_1E_1E_3 & \varepsilon_0v_3E_1E_3 & -v_{132}E_1E_2 & 0 \\ v_2E_{13} & v_1E_{23} & -v_{123}E_3^2 & -v_{123}E_2E_3 & 0 & -v_{123}E_1E_3 & 0 & \varepsilon_0v_1E_1E_2 & \varepsilon_0v_2E_1E_2 \\ \varepsilon_0v_3E_2E_3 & -v_{132}E_2E_3 & 0 & -v_1E_{23} & -v_{132}E_3^2 & -\varepsilon_0v_1E_2E_1 & 0 & -v_{132}E_1E_3 & -\varepsilon_0v_3E_1E_3 \\ \varepsilon_0v_2E_2E_3 & 0 & -v_{123}E_2E_3 & -v_{123}E_2^2 & -v_1E_{23} & -v_{123}E_1E_2 & -\varepsilon_0v_2E_1E_2 & -\varepsilon_0v_1E_1E_3 & 0 \\ -v_{231}E_1E_3 & \varepsilon_0v_3E_1E_3 & 0 & -\varepsilon_0v_2E_1E_2 & 0 & -v_2E_{13} & -v_{231}E_3^2 & -\varepsilon_0v_3E_2E_3 & -v_{231}E_2E_3 \\ 0 & \varepsilon_0v_1E_3E_1 & -v_{123}E_1E_3 & -v_{123}E_1E_2 & -\varepsilon_0v_1E_1E_2 & -v_{123}E_1^2 & -v_2E_{13} & 0 & -\varepsilon_0v_2E_2E_3 \\ -v_{231}E_1E_2 & 0 & \varepsilon_0v_2E_1E_2 & 0 & -\varepsilon_0v_3E_1E_3 & -\varepsilon_0v_2E_2E_3 & -v_{231}E_2E_3 & -v_3E_{12} & -v_{231}E_2^2 \\ 0 & -v_{132}E_1E_2 & \varepsilon_0v_1E_1E_2 & -\varepsilon_0v_1E_1E_3 & -v_{132}E_1E_3 & 0 & -\varepsilon_0v_3E_2E_3 & -v_{132}E_1^2 & -v_3E_{12} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\psi^{\mathbf{m}*} = \begin{pmatrix} -v_{231}E_1 & \varepsilon_0v_3E_2 & \varepsilon_0v_2E_3 \\ \varepsilon_0v_3E_1 & -v_{132}E_2 & \varepsilon_0v_1E_3 \\ \varepsilon_0v_2E_1 & \varepsilon_0v_1E_2 & -v_{123}E_3 \\ 0 & -v_{132}E_3 & -\varepsilon_0v_1E_2 \\ 0 & -\varepsilon_0v_1E_3 & -v_{123}E_2 \\ -v_{231}E_3 & 0 & -\varepsilon_0v_2E_1 \\ -\varepsilon_0v_2E_3 & 0 & -v_{123}E_1 \\ -v_{231}E_2 & -\varepsilon_0v_3E_1 & 0 \\ -\varepsilon_0v_3E_2 & -v_{132}E_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\psi^{d*} = \begin{pmatrix} -v_{231}E_1 & \varepsilon_0v_3E_1 & \varepsilon_0v_2E_1 & 0 & 0 & -\varepsilon_0v_2E_3 & -v_{231}E_3 & -\varepsilon_0v_3E_2 & -v_{231}E_2 \\ \varepsilon_0v_3E_2 & -v_{132}E_2 & \varepsilon_0v_1E_2 & -\varepsilon_0v_1E_3 & -v_{132}E_3 & 0 & 0 & -v_{132}E_1 & -\varepsilon_0v_3E_1 \\ \varepsilon_0v_2E_3 & \varepsilon_0v_1E_3 & -v_{123}E_3 & -v_{123}E_2 & -\varepsilon_0v_1E_2 & -v_{123}E_1 & -\varepsilon_0v_2E_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Использованы обозначения:

$$v_{ijk} = \varepsilon_0 v_i v_j / v_k, \quad E_{12} = \varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) / 2,$$

$$E_{13} = \varepsilon_0 (E_1^2 + E_3^2 - E_2^2) / 2,$$

$$E_{23} = \varepsilon_0 (E_2^2 + E_3^2 - E_1^2) / 2, \quad E_i = W_i / v_i, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon^{(0)}.$$

Из (10)–(12) и матричных представлений (13)–(16) следует, что свойства среды учитываются в коэффициентах компонент Π_{lk}^* , d_l^{Π} , h_l и энтропии η ,

коэффициенты компонент m_{lk} , d_l^m определены направлением и величиной напряженности начального электростатического поля, при этом все зависят от характера и величины начальных деформаций.

Для прозрачности дальнейшего изложения введем расширенные векторы смещения $\mathbf{u}^{\text{ET}} = \{u_1, u_2, u_3, u_4 = \varphi, u_5 = T\}$ и нагрузки $\mathbf{f}^{\text{ET}} = \{f_1, f_2, f_3, f_4 = -g^*, f_5 = -h^*\}$ и используем обозначения

$$\begin{aligned}\Theta_{lk} &= \theta_{lks p} u_{s,p} + \theta_{lk4p} u_{4,p} + \theta_{lk55} u_5, \\ d_l &= \theta_{l4sp} u_{s,p} + \theta_{l44p} \varphi_p + \theta_{l555} u_5, \\ -\eta &= \theta_{55sp} u_{s,p} - \theta_{p555} u_{4,p} + \theta_{5555} u_5,\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\theta_{lks p} &= c_{lks p}^* + \zeta_{lks p}^*, \quad \theta_{lk4p} = e_{lkp}^* + \psi_{lkp}^*, \\ \theta_{l4sp} &= e_{lsp}^* + \psi_{lsp}^*, \\ \theta_{lk55} &= \theta_{55lk} = -q_{lk}^*, \quad \theta_{l44p} = -\eta_{lp}^*, \\ k, l, s, p &= 1, 2, 3, \\ \theta_{l555} &= p_l, \quad \theta_{5555}^{(n)} = -c_\varepsilon \rho_0 T_0^{-1}.\end{aligned}\quad (18)$$

Далее перейдем к безразмерным нормализованным параметрам [6; 18].

$$\begin{aligned}x_i' &= \frac{\omega^* x_i}{V_p^0}, \quad u_i' = \frac{\rho_0 \omega^* V_p^0}{q_{11}^0 T_0} u_i, \\ T' &= \frac{T}{T_0}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \\ \omega^* &= \frac{c_\varepsilon^0 c_{11}^0}{\lambda_{11}^0}, \quad \lambda_{ij}' = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}^0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad c_\varepsilon' = \frac{c_\varepsilon}{c_\varepsilon^0}, \\ \Theta_{ij}' &= \frac{\Theta_{ij}}{q_{11}^0 T_0}, \quad d_i' = \frac{c_{11}^0}{q_{11}^0 T_0 e_{33}^0} d_i, \\ h_i' &= \frac{V_p^0}{\omega^* T_0 \lambda_{11}^0} h_i, \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \theta_{ijkl}' &= \frac{\theta_{ijkl}}{c_{11}^0}, \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad \theta_{ik4p}' = \frac{\theta_{ik4p}}{e_{33}^0}, \\ \theta_{i4kp}' &= \frac{\theta_{i4kp}}{e_{33}^0} \quad (i, k, p = 1, 2, 3), \\ \theta_{k44k}' &= \frac{\theta_{k44k}}{e_{33}^0}, \quad \theta_{kk55}' = \frac{\theta_{kk55}}{q_{11}^0} \quad (k = 1, 2, 3), \\ \theta_{3555}' &= \frac{c_{11}^0}{q_{11}^0 e_{33}^0} p_3, \quad \theta_{5555}' = \frac{T_0 \theta_{5555}}{\rho_0 c_\varepsilon^0}, \\ E &= \frac{T_0 (q_{11}^0)^2}{\rho_0 c_\varepsilon^0 c_{11}^0}, \quad E_p = \frac{\omega^* e_{33}^0 \varphi_0}{q_{11}^0 T_0 V_p^0}, \\ \eta &= \frac{c_{11}^0 e_{33}^0}{(e_{33}^0)^2}, \quad E_\eta = E_p \eta, \quad E_T = E T_1'.\end{aligned}$$

Здесь индексом «0» отмечены параметры материала в ЕС; E, E_p, E_η – безразмерные нормирующие множители.

В безразмерных параметрах (далее штрихи опущены) линеаризованные уравнения (3) с учетом (10)–(16) и обозначений (17), (18) принимают вид:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{11}^* [u_1] + \theta_1 u_{2,12} + \mathbf{L}_{13}^* [u_3] + \\ + E_p \mathbf{L}_{14}^* [u_4] + \theta_{1155} u_{5,1} = 0 \\ \theta_1 u_{1,12} + \mathbf{L}_{22}^* [u_2] + \mathbf{L}_{23}^* [u_3] + \\ + E_p \mathbf{L}_{24}^* [u_4] + \theta_{2255} u_{5,2} = 0 \\ \mathbf{L}_{31}^* [u_1] + \mathbf{L}_{32}^* [u_2] + \mathbf{L}_{33}^* [u_3] + \\ + E_p \mathbf{L}_{34}^* [u_4] + \mathbf{L}_{35}^* [u_5] = 0 \\ \mathbf{L}_{41}^* [u_1] + \mathbf{L}_{42}^* [u_2] + \mathbf{L}_{43}^* [u_3] + \\ + E_\eta \mathbf{L}_{44}^* [u_4] + \mathbf{L}_{45}^* [u_5] = 0 \\ i\omega E_T [\theta_{1155} u_{1,1} + \theta_{2255} u_{2,2} + \theta_{3355} u_{3,3} + E_p \theta_{3555} u_{4,3}] - \\ - \mathbf{L}_{55}^* [u_5] = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Граничные условия (4)–(9) представляются выражениями:

на поверхности:

$$\begin{aligned}u_k &= u_k^*(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in o_1, \\ \Theta_{3k} &= f_k(x_1, x_2), \quad k = 1, 2, 3, \quad (x_1, x_2) \in o_2,\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}u_5 &= \varphi^*(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in o_3, \\ d_3 &= f_4(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in o_4,\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}u_5 &= T^*(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in o_5, \\ \lambda_{33} u_{5,3} &= f_5(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in o_6,\end{aligned}\quad (22)$$

на бесконечности:

$$x_3 \rightarrow -\infty, \quad u_k \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \quad (23)$$

В формулах (19) использованы обозначения

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{kk}^* &= \theta_{ikki} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \rho_0 \omega^2, \\ \mathbf{L}_{44}^* &= \theta_{k44k} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \mathbf{L}_{55}^* = \lambda_{kk} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - i\omega T_1 \theta_{5555}, \\ k, i &= 1, 2, 3,\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{s3}^* = \mathbf{L}_{3s}^* = (\theta_{ss33} + \theta_{s3s3}) \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_3},$$

$$\mathbf{L}_{s4}^* = \mathbf{L}_{4s}^* = (\theta_{ss43} + \theta_{s34s}) \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_3}, \quad s = 1, 2,$$

$$\mathbf{L}_{34}^* = \theta_{k34k} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \mathbf{L}_{35}^* = \theta_{3555} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\mathbf{L}_{45}^* = \theta_{3555} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \theta_1 = \theta_{1122} + \theta_{1212}.$$

Участвующие в граничных условиях (20)–(22) компоненты линеаризованных тензора напряже-

ний, вектора индукции и потока тепла в безразмерном виде могут быть записаны:

$$\begin{aligned}\Theta_{31} &= \theta_{3122}u_{2,2} + \theta_{3133}u_{3,3} + \theta_{3123}u_{2,3} + \theta_{3132}u_{3,2} + \\ &+ \theta_{3113}u_{1,3} + \theta_{3131}u_{3,1} + \theta_{3121}u_{2,1} + \\ &+ E_p(\theta_{3141}u_{4,1} + \theta_{3143}u_{4,3}), \\ \Theta_{32} &= \theta_{3211}u_{1,1} + \theta_{3233}u_{3,3} + \theta_{3223}u_{2,3} + \theta_{3232}u_{3,2} + \\ &+ \theta_{3213}u_{1,3} + \theta_{3231}u_{3,1} + \theta_{3212}u_{2,2} + \\ &+ E_p(\theta_{3242}u_{4,2} + \theta_{3243}u_{4,3}), \\ \Theta_{33} &= \theta_{3311}u_{1,1} + \theta_{3322}u_{2,2} + \theta_{3333}u_{3,3} + \theta_{3323}u_{2,3} + \\ &+ \theta_{3313}u_{1,3} + \theta_{3321}u_{2,1} + \theta_{3312}u_{2,1} + \\ &+ E_p(\theta_{3341}u_{4,1} + \theta_{3342}u_{4,2} + \theta_{3343}u_{4,3}) + \theta_{3355}u_5, \\ d_3 &= \theta_{3411}u_{1,1} + \theta_{3422}u_{2,2} + \theta_{3433}u_{3,3} + \theta_{3423}u_{2,3} + \\ &+ \theta_{3432}u_{3,2} + \theta_{3413}u_{1,3} + \theta_{3431}u_{3,1} + \\ &+ E_\eta\theta_{3443}u_{4,3} + \theta_{3555}u_5, h_3 = -\lambda_{33}u_{5,3}.\end{aligned}\quad (24)$$

Следует отметить, что, в отличие от приведенных в работе [18], компоненты линеаризованных тензора напряжений, вектора индукции и потока тепла при учете начального электростатического поля принимают более сложный вид (24).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС

В силу (1), (2) НДС материала полагается однородным, создается за счет действия механических напряжений, однородного электростатического поля и температуры, определяется в лагранжевой системе координат тензором напряжений Кирхгофа (11) и материальной формой вектора электрической индукции. При наличии начального электрического поля компоненты в декартовой системе координат имеют вид [18]:

$$P_{ij} = c_{ijk}S_k - e_{ijk}W_k^0 - (T_1 - T_0)q_{ij}, \quad (25)$$

$$d_k = e_{kll}S_l + (\epsilon_0 Jv_k^{-2}\delta_{nk} + \beta_{nk})W_n^0 + p_k(T_1 - T_0).$$

W_k^0 – заданные компоненты вектора напряженности начального электростатического поля; $(T_1 - T_0) = \Delta T$ – определяют предварительные нагрев или охлаждение материала относительно $T_0 = 298$ К. В силу свойств термоэлектродупругих материалов симметрии 6mm и условий (1) система (25) принимает вид:

$$\begin{aligned}P_{11} &= c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 - e_{31}W_3^0 - (T_1 - T_0)q_{11}, \\ P_{22} &= c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{13}S_3 - e_{31}W_3^0 - (T_1 - T_0)q_{11}, \\ P_{33} &= c_{13}S_1 + c_{13}S_2 + c_{33}S_3 - e_{33}W_3^0 - (T_1 - T_0)q_{33},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_1 &= (\epsilon_0 Jv_1^{-2} + \beta_{11})W_1^0, \quad d_2 = (\epsilon_0 Jv_2^{-2} + \beta_{11})W_2^0, \\ d_3 &= e_{31}S_1 + e_{31}S_2 + e_{33}S_3 + \\ &+ (\epsilon_0 Jv_3^{-2} + \beta_{33})W_3^0 + p_3(T_1 - T_0).\end{aligned}\quad (26)$$

Таким образом, для определения параметров НДС получаем 6 уравнений (26), связывающих шесть компонент тензора напряжений и вектора электрической индукции с шестью компонентами тензора деформаций и вектора напряженности электрического поля. В работе использована лицензированная программа расчета параметров НДС для термоэлектродупругих материалов симметрии 6mm в исходном состоянии [19]. Предусмотрены различные способы задания НДС: через начальные деформации v_i и вектор напряженности начального электростатического поля $\mathbf{W}$; через напряжения P_{kk} и вектор электрической индукции $\mathbf{d}$ или вектор напряженности $\mathbf{W}$; через вектор напряженности $\mathbf{W}$, деформацию v вдоль одной оси и условий, налагаемых на напряжения, действующие в плоскости ортогональной выбранной оси.

В работе рассмотрены следующие виды НДС:

– в отсутствие начального электростатического поля и температуры:

- одноосные – $1x_i (P_{ii} = P, P_{jj} = P_{kk} = 0, i \neq j \neq k, \mathbf{W} = \{0,0,0\}, \Delta T = (T_1 - T_0) = 0)$,
- двухосные – $2x_i (P_{ii} = 0, P_{jj} = P_{kk} = P, i \neq j \neq k, \mathbf{W} = \{0,0,0\}, \Delta T = 0)$,
- гидростатическое – $3x (P_{33} = P, P_{11} = P_{22} = 0, \mathbf{W} = \{0,0,0\}, \Delta T = 0)$;

– при наличии начальной температуры и в отсутствие электростатического поля – $1x_i T^\pm (P_{ii} = P, P_{jj} = P_{kk} = 0, i \neq j \neq k, \mathbf{W} = \{0,0,0\}, \Delta T = \pm \tau)$;

– при наличии начального электростатического поля и в отсутствие температуры – $1x_1 W_3^\pm (P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0, \mathbf{W} = \{0,0,W_3^0 = \pm W^0\}, \Delta T = 0)$;

– при наличии электростатического поля и начальной температуры – $1x_1 W_3^\pm T^\pm (P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0, \mathbf{W} = \{0,0,W_3^0 = \pm W^0\}, \Delta T = \pm \tau)$.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Исследование влияния начальных воздействий на изменение свойств термоэлектродупругих материалов класса 6mm проведено на примере пироэлектрика CdSe:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 5504 \text{ кг/м}^3, \\ c_{11} &= 7,41 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{12} &= 4,52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{13} &= 3,93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{33} &= 8,36 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
c_{44} &= 1,32 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
c_{66} &= 1,445 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
e_{15} &= -0,138 \text{ Кл/м}^2, \\
e_{31} &= -0,159 \text{ Кл/м}^2, \\
e_{33} &= 0,347 \text{ Кл/м}^2, \\
\varepsilon_{11}/\varepsilon^{(0)} &= 9,33, \\
\varepsilon_{33}/\varepsilon^{(0)} &= 10,2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{11} &= q_{22} = 0,621 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2/\text{К}, \\
q_{33} &= 0,551 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2/\text{К}, \\
\lambda_{11} &= \lambda_{22} = \lambda_{33} = 9 \text{ Вт/м/К}, \\
p_3 &= -2,94 \cdot 10^{10} \text{ Кл/м}^2/\text{К}, \\
c_\varepsilon &= 260 \text{ Дж/кг/К}.
\end{aligned}$$

В силу (1), (2), (25), (26) при расчете параметров НДС величину наведенных начальных деформаций определяют механические напряжения, действующие

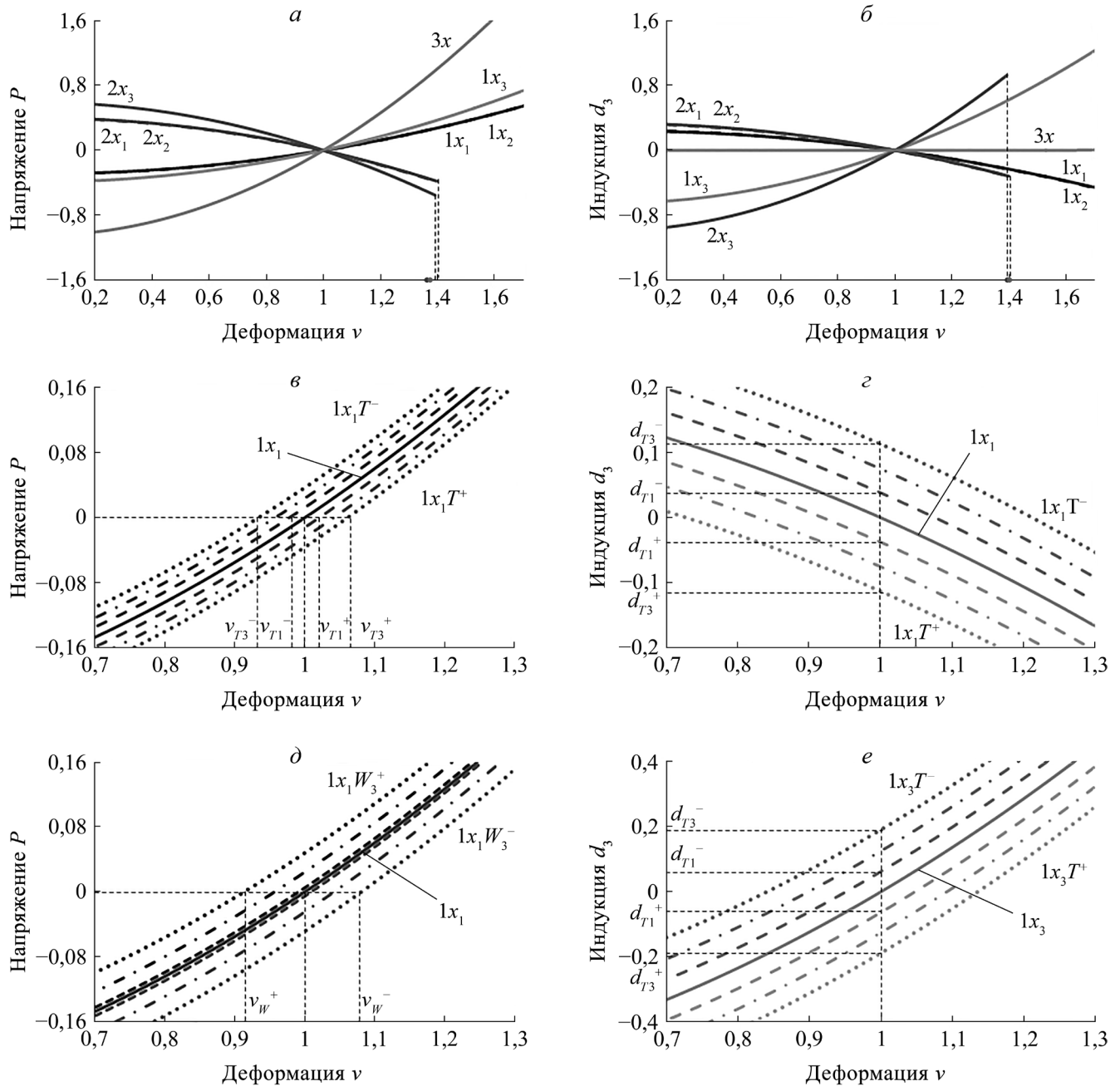


Рис. 1. Зависимость начальных напряжений (а, в, д) и вектора индукции (б, г, е) от деформации: а, б – без учета температуры и электростатического поля, различные виды НДС; в, г – НДС $1x_1T^\pm$; д – влияние W_3^0 , НДС $1x_1W_3^\pm$; е – НДС $1x_3T^\pm$.
Fig. 1. Dependence of initial stresses (a, в, д) and induction vector (б, г, е) on deformation: а, б – without taking into account temperature and electrostatic field, various types of stress strain states (SSS); в, г – SSS $1x_1T^\pm$; д – influence W_3^0 , SSS $1x_1W_3^\pm$; е – SSS $1x_3T^\pm$.

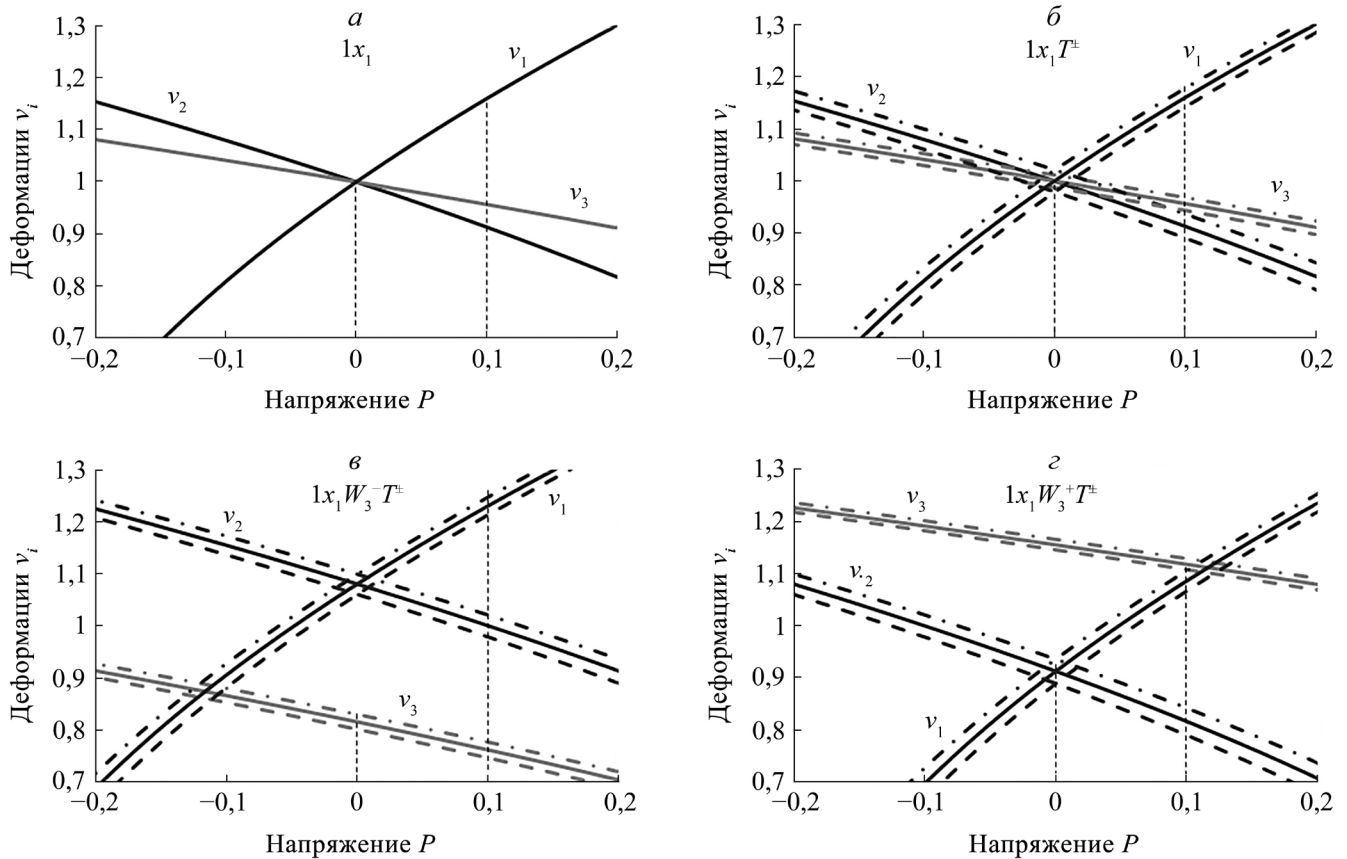


Рис. 2. Зависимость деформаций от напряжений: а – НДС $1x_1$; б – НДС $1x_1 T^\pm$; в – НДС $1x_1 W_3^- T^\pm$; г – НДС $1x_1 W_3^+ T^\pm$.

Fig. 2. Dependence of strain on stress: а – SSS $1x_1$; б – SSS $1x_1 T^\pm$; в – SSS $1x_1 W_3^- T^\pm$; г – SSS $1x_1 W_3^+ T^\pm$.

щие вдоль главных осей, изменение температуры относительно исходной T_0 и компонента W_3^0 вектора напряженности начального электростатического поля. Следует отметить, что в представлении линеаризованных тензора напряжений Пиолы – Максвелла и вектора индукции (10), (11) участвуют все компоненты вектора напряженности начального электростатического поля $\mathbf{W}$ (15), (16). Их наличие приводит к появлению новых, отличных от нуля элементов в матрице связи, однако их значение не велико. Более значимое влияние на изменение упругих, пьезоэлектрических и термоупругих свойств оказывает W_3^0 .

На рисунке 1 показана зависимость начальных напряжений от деформации при различных видах механических воздействий (рис. 1а), с учетом влияния начальных температур (рис. 1б) и электростатического поля (рис. 1д) при одноосном НДС $1x_1$. На рисунках 1б, г, е приведена зависимость от деформации компоненты вектора электрической индукции, наведенной в материале действием механических напряжений, при различных видах

НДС (рис. 1б), с учетом начальных температур при НДС $1x_1$ (рис. 1г) и НДС $1x_3$ (рис. 1е). Точками на рисунках 1а, б отмечены максимально допустимые растяжения для двухосных НДС. Сплошная, штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линии на рисунках 1в, г, е отвечают значениям $\tau = 0, \pm 0,04, \pm 0,08, \pm 0,12$ ($\tau = 0,04$ соответствует изменению температуры на 12° вне зоны фазовых переходов). Сплошная, штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линии на рисунке 1д соответствуют $W^0 = 0, 0,01, 0,05, 0,1$ ($W^0 = 0,1$ соответствует напряженности $1 \cdot 10^6$ В/м).

При сравнении рисунков 1а и б видно, что наведенные деформации достигаются максимальными значениями механических напряжений при НДС $3x$, однако электрической индукции в этом состоянии не возникает [20]. Механические напряжения НДС $1x_1$ и $1x_2$, как и при НДС $2x_1$ и $2x_2$, равны (рис. 1а); среди одноосных большие механические усилия требуются при $1x_3$, среди двухосных – при НДС $2x_3$. Рисунок 1б иллюстрирует прямой пьезоэлектрический эффект, когда электрическая индук-

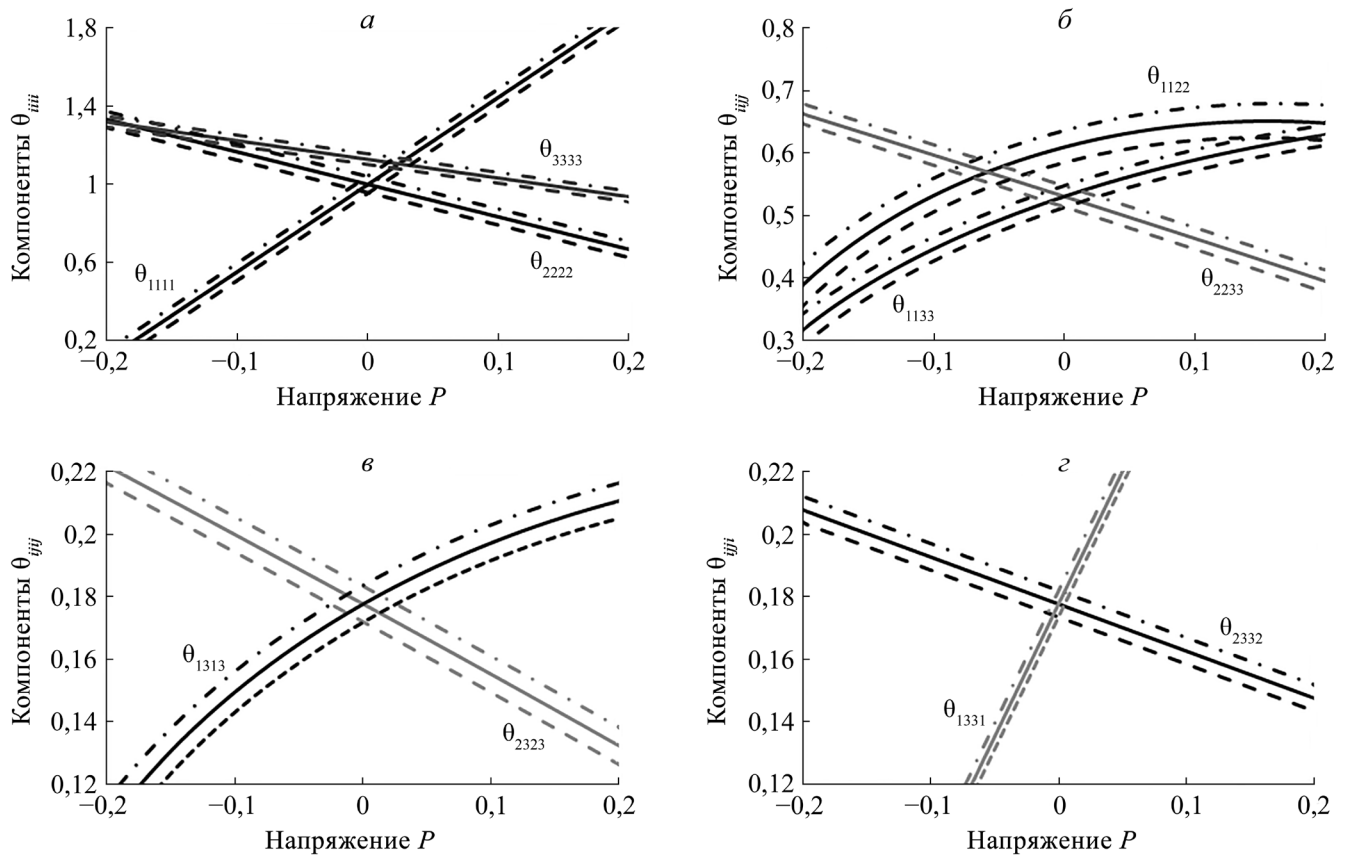


Рис. 3. Влияние начальных механических напряжений и температуры на изменение упругих свойств материала, НДС $1x_1T^\pm$.
Fig. 3. The influence of initial mechanical stresses and temperature on the change in the elastic properties of the material, SSS $1x_1T^\pm$.

ция наводится в материале за счет механических воздействий. Максимальные значения d_3 достигаются при НДС $2x_3$ и $1x_3$ (рис. 1б), значения d_3 при НДС $1x_1$ и $1x_2$, как и при НДС $2x_1$ и $2x_2$, совпадают, но противоположны по направлению относительно НДС $1x_3$. На рисунках 1з, е видно влияние начальных температурных и механических воздействий на электрическую индукцию при одноосных НДС $1x_1$ и $1x_3$. В частности, проиллюстрирован пьезоэлектрический эффект: в отсутствие механической деформации ($v = 1$) наводится электрическая индукция $d_{T1}^\pm, d_{T3}^\pm$, значение которой пропорционально изменению температуры. Из рисунков 1в, д видно, что изменение начальной температуры, как и направленность вектора напряженности начального электростатического поля, при равном значении P может либо увеличивать, либо уменьшать величину наведенной деформации; в отсутствие механических воздействий $P = 0$, воздействие начальной температуры и начальных электростатических полей наводит в материале деформации $v_T^\pm$ и $v_W^\pm$.

На рисунке 2 в рамках одноосного НДС $1x_1$ показана зависимость деформаций v_i вдоль осей от

напряжений в отсутствие (рис. 2а) и при наличии начальных температурных (рис. 2б) и электростатических (рис. 2в, г) воздействий. Сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии на рисунках, как и на рисунке 1в, отвечают значениям $\tau = 0, 0,04, -0,04$. На рисунках 2в, г показано влияние ориентации вектора напряженности начального электростатического поля для W^0 , равное $-0,1, 0, 0,1$ соответственно.

Из рисунков 2а, б видно, как в рамках НДС $1x_1$ изменяются значения деформаций вдоль осей в зависимости от величины механического напряжения P в отсутствие и при наличии температурных воздействий. Следует отметить, что в силу свойств материала влияние изменения температуры на деформацию вдоль оси x_3 несколько меньше, чем на деформации вдоль осей x_1 и x_2 . В целом температурные воздействия (вне фазовых переходов) приводят к изменениям значений деформаций, характер которых определяется видом и величиной механических воздействий. Совершенно иное воздействие оказывает начальное электростатическое поле (рис. 2в, г) большой напряженности: происхо-

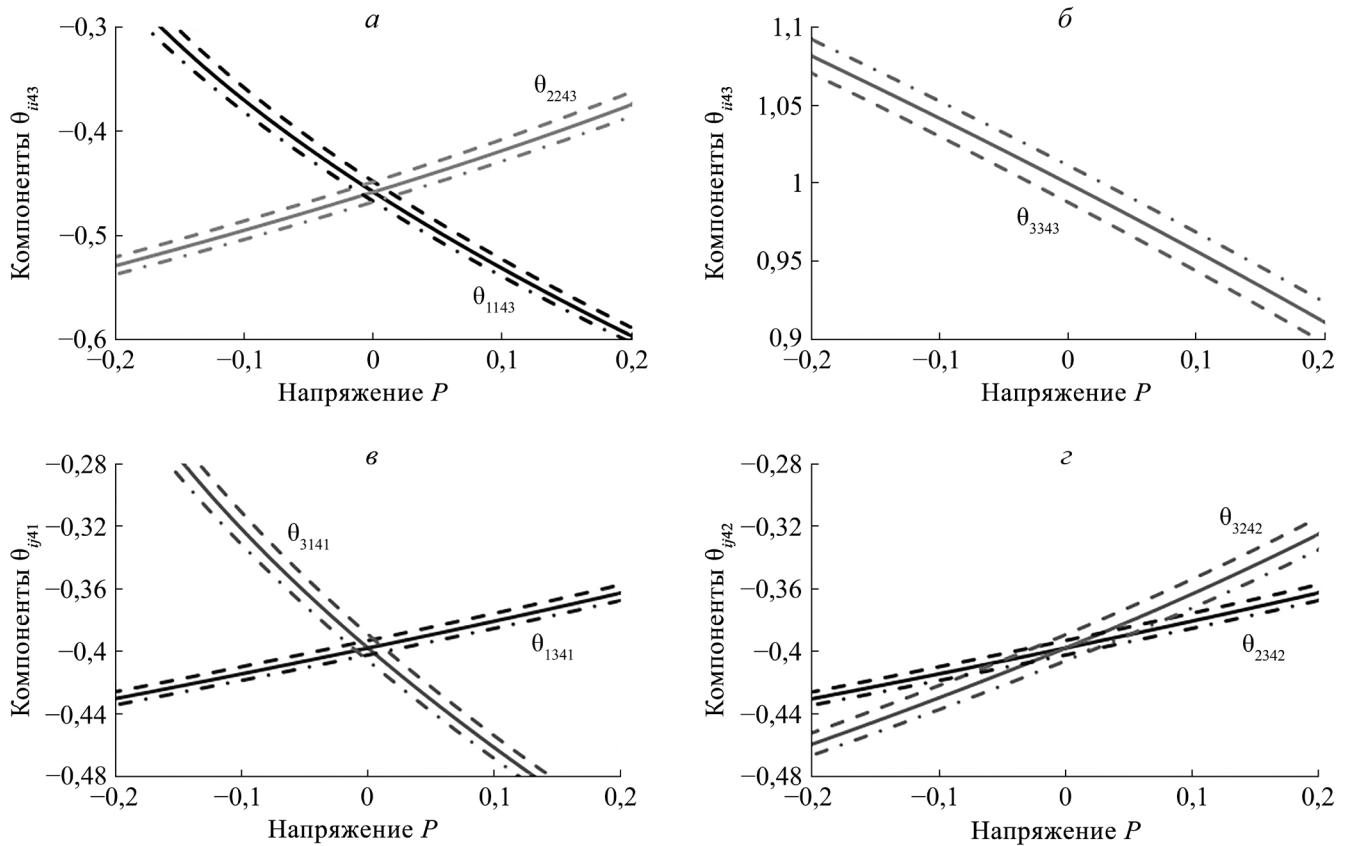


Рис. 4. Влияние начальных механических напряжений и температуры на изменение пьезоэлектрических свойств материала, НДС $1x_1 T^\pm$.

Fig. 4. The influence of initial mechanical stresses and temperature on the change in the piezoelectric properties of the material, SSS $1x_1 T^\pm$.

дит качественное изменение характера деформаций вдоль осей x_3 и x_2 , которое зависит от направленности W_3 .

На рисунках 3 и 4а, б представлено изменение участвующих в представлениях (17), (19)–(24) упругих θ_{iiii} , θ_{ijij} , θ_{ijji} , θ_{ijji} ($i, j = 1, 2, 3$) (рис. 3) и пьезоэлектрических θ_{ii4p} (рис. 4) свойств материала в зависимости от величины начальных механических и температурных воздействий в рамках НДС $1x_1 T^\pm$. Следует отметить, что приведенные на рисунках 3 и 4 компоненты θ_{lksp} участвуют в определении скоростей ПАВ, компоненты θ_{1111} , θ_{2222} , θ_{3333} и θ_{1313} , θ_{2323} , θ_{1331} , θ_{2332} – в определении скоростей объемных волн в преднапряженном термоэлектродупругом материале. Как и на рисунках 2б–г, сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии на рисунках 3, 4 отвечают значениям $\tau = 0, 0,04, -0,04$.

Приведенные на рисунке 3 компоненты θ_{1111} , θ_{2222} , θ_{3333} (рис. 3а) соответствуют в ЕС c_{11} , $c_{22} = c_{11}$, c_{33} , θ_{1122} , θ_{1133} , θ_{2233} (рис. 3б) отвечают в ЕС c_{12} , c_{13} , $c_{23} = c_{13}$, θ_{1313} , θ_{2323} , θ_{1331} , θ_{2332} (рис. 3в, г) в ЕС представляют одну константу c_{44} . Из рисунков видно,

что определяющими в изменении упругих свойств материала являются величина и вид механических напряжений P , температурные воздействия сказываются на значениях модулей, сохраняя их качественное поведение. Следует отметить различие в изменении значений упругих модулей: так, в рамках НДС $1x_1 T^+$ и НДС $1x_1 T^-$ максимальные изменения $\Delta = |\theta_{lksp}^{T^+} - \theta_{lksp}^{T^-}|$ претерпевают θ_{1111} и θ_{2222} , минимальные – θ_{2332} и θ_{1331} .

На рисунке 4 показано влияние начальных механических напряжений и температуры на изменение пьезоэлектрических свойств материала θ_{ii43} , θ_{ij42} , θ_{ij41} , которые в ЕС соответствуют $e_{31}(\theta_{1143})$, $e_{32}(\theta_{2243})$, $e_{33}(\theta_{3343})$, $e_{15}(\theta_{3141}, \theta_{1341}, \theta_{3242}, \theta_{2342})$.

Как и в случае упругих модулей, изменение пьезоэлектрических свойств определяется видом и величиной действия начальных механических напряжений. Учет предварительного нагрева или охлаждения приводит к изменению значений пьезоэлектрических модулей, не изменяя характер поведения. Из сравнения рисунков 4а, б видно, что преднагрев (штрихпунктирная линия) приводит к увеличению

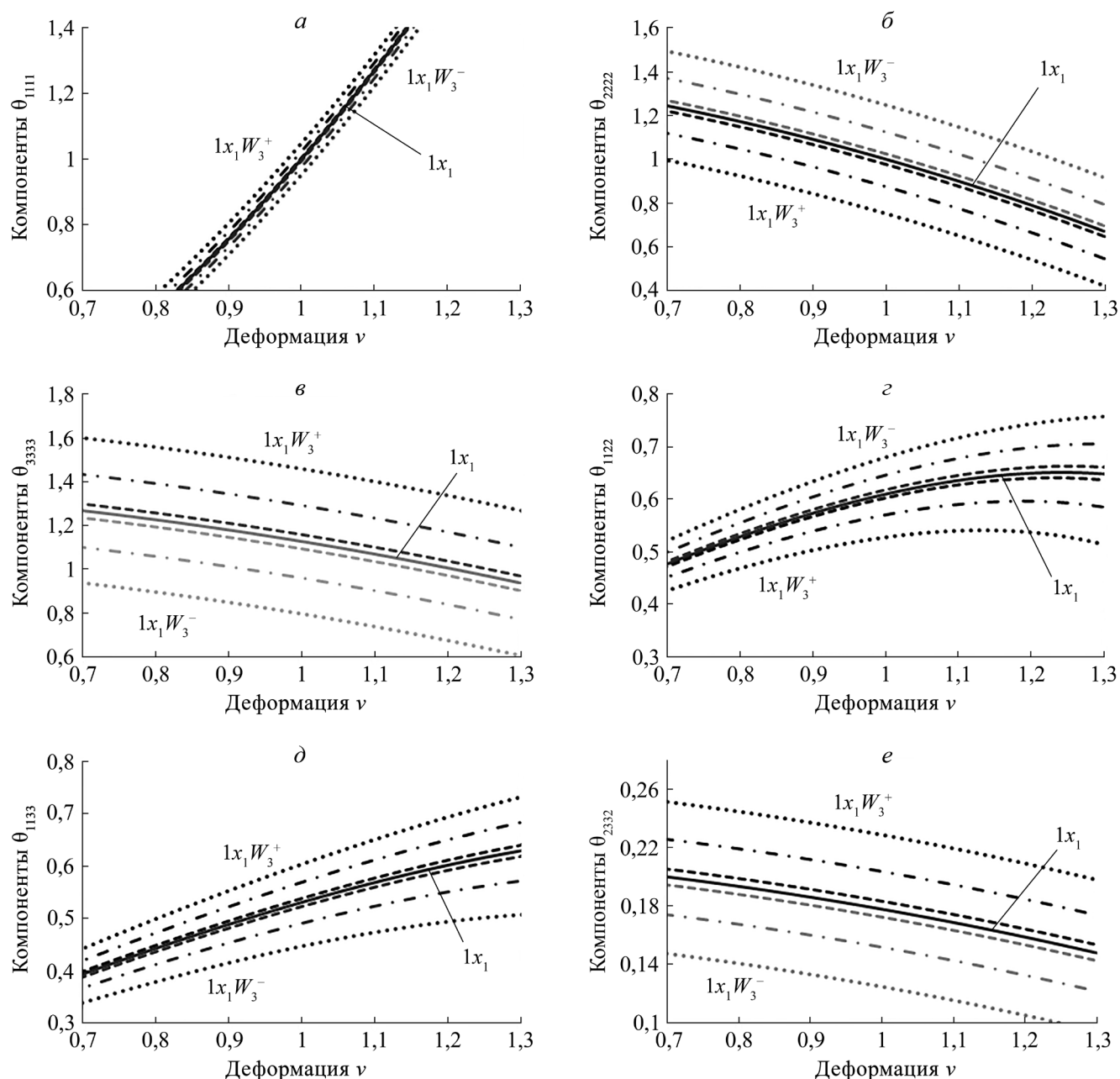


Рис. 5. Влияние механических напряжений, величины и направленности напряженности электростатического поля на изменение упругих свойств материала, НДС $1x_1W_3^\pm$.

Fig. 5. The influence of mechanical stresses, magnitude and direction of the electrostatic field strength on the change in the elastic properties of the material, SSS $1x_1W_3^\pm$.

абсолютной величины пьезоэлектрических модулей. Следует отметить, что в настоящей работе исследовано влияние незначительных температурных воздействий. Учет больших начальных температур существенно меняет свойства материала, выходит за рамки линеаризованной теории и требует привлечения нелинейных соотношений.

Изменение упругих и пьезоэлектрических свойств материала в зависимости от величины на-

чальных деформаций, наведенных за счет механических и электростатических воздействий в рамках НДС $1x_1W_3^\pm$, представлено на рисунках 5 и 6. Как и на рисунке 1г, сплошная, штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линии отвечают значениям $W^0 = 0, 0,01, 0,05, 0,1$.

Из рисунков видно, что ориентацией вектора напряженности начального электростатического поля можно эффективно управлять упругими пара-

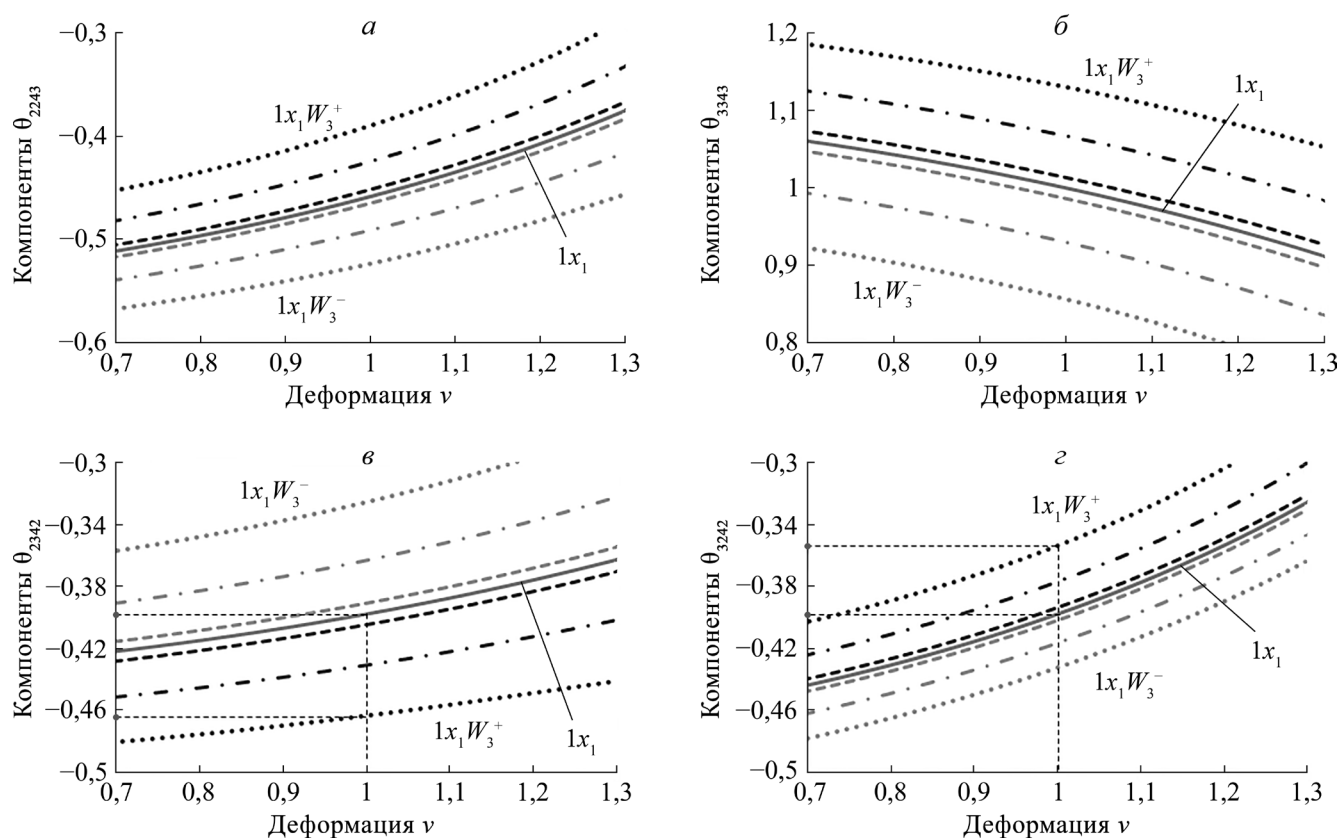


Рис. 6. Влияние механических напряжений, величины и направленности напряженности электростатического поля на изменение пьезоэлектрических свойств материала, НДС $1x_1W_3^+$.

Fig. 6. The influence of mechanical stresses, magnitude and direction of the electrostatic field strength on the change in the piezoelectric properties of the material, SSS $1x_1W_3^+$.

метрами материала, либо увеличивая, либо уменьшая значения упругих модулей. В пределах одного направления (НДС $1x_1W_3^+$) при увеличении напряженности W^0 значения модулей θ_{1111} , θ_{1133} , θ_{3333} и θ_{2332} увеличиваются, в то время как значения θ_{2222} , θ_{1122} уменьшаются. Для модулей θ_{ijij} характерна зависимость величины изменения модулей не только от значения W^0 , но и от характера деформации (рис. 5з, д).

На рисунке 6 показано совместное влияние начальных механических и электростатических воздействий на изменение пьезоэлектрических свойств материала θ_{2243} , θ_{3343} , θ_{2342} , θ_{3242} , которые в ЕС соответствуют e_{32} , e_{33} , e_{15} .

Как и в предыдущем случае, наличие начального электростатического поля существенно меняет пьезоэлектрические свойства материала, при этом отмечается различное влияние на определенные модули. Так, в рамках НДС $1x_1W_3^+$ значение θ_{3343} увеличивается, в то время как абсолютная величина θ_{2243} уменьшается (рис. 6а, б). В отсутствие механической деформаций ($\nu = 1$, сплошная линия)

модули θ_{2342} и θ_{3242} принимают значения, равные e_{15} материала в ЕС, наличие начального электростатического поля $1x_1W_3^+$ существенно уменьшает величину θ_{2342} и увеличивает θ_{3242} (рис. 6в, г).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках линеаризованной теории термоэлектроупругости разработана модель термоэлектроупругой среды класса 6mm гексагональной сингонии, подверженной начальным механическим, тепловым и электростатическим воздействиям. Полагается, что наведенное в материале НДС однородно, начальные тепловые воздействия не превышают температуры фазовых переходов, начальное электростатическое поле задано вектором напряженности.

Исследовано раздельное и совместное влияние вида и величины начальных воздействий как на характер наводимых деформаций, так и на изменение упругих и пьезоэлектрических свойств материала. Показано характерное для рассматриваемого

мого класса пирозлектриков наличие пьезо- и пирозэффектов: появление электрической индукции при действии механических напряжений вдоль осей и ее отсутствие при гидростатическом воздействии; появление электрической индукции под действием температуры в отсутствие механических напряжений. Установлены виды механических воздействий, приводящих к максимальным значениям электрической индукции. Показано, что при совместном тепловом и механическом воздействии определяющую роль в характере наведенных деформаций играют механические напряжения. Изменение температуры может либо усилить,

либо ослабить их действие. При совместном механическом и электростатическом воздействии наличие начального электростатического поля большой напряженности в зависимости от его направленности приводит к качественным изменениям характера деформаций. Показаны различия в трансформации упругих и пьезоэлектрических свойств материала в зависимости от характера наведенных деформаций.

Работа выполнена в рамках реализации госзадания Южного научного центра Российской академии наук (№ госрегистрации 122020100343-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Mindlin R.D. 1961. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In: *Problems of Continuum Mechanics: Contributions in Honor of the Seventieth Birthday of Academician N.I. Muskhelishvili*, Philadelphia, SIAM: 282–290.
- Nowacki W. 1965. A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals. *Proceedings of Vibration Problems*. 6(1): 3–15.
- Tiersten H.F. 1971. On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity. *International Journal of Engineering Sciences*. 9(7): 587–604. doi: 10.1016/0020-7225(71)90062-0
- Chandrasekharaiah D.S. 1984. A temperature-rate-dependent theory of thermopiezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. 7(3–4): 293–306. doi:10.1080/01495738408942213
- Chandrasekharaiah D.S. 1988. A generalized linear thermoelasticity theory for piezoelectric media. *Acta Mechanica*. 71(1–4): 39–49. doi: 10.1007/BF01173936
- Sharma M.D. 2010. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezo-thermoelastic media. *Acta Mechanica*. 215(1–4): 307–318. doi: 10.1007/s00707-010-0336-3
- Biswas S. 2020. Surface waves in piezothermoelastic transversely isotropic layer lying over piezothermoelastic transversely isotropic half-space. *Acta Mechanica*. 232(2): 373–387. doi: 10.1007/s00707-020-02848-8
- Kuang Z.-B., Yuan X.-G. 2011. Reflection and transmission of waves in pyroelectric and piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*. 330(6): 1111–1120. doi: 10.1016/j.jsv.2010.09.026
- Singh P., Singh A.K., Paswan B., Chattopadhyay A. 2023. Mathematical study on reflection and transmission of plane waves in a rotating piezo-thermo-elastic composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 30(14): 2941–2952. doi: 10.1080/15376494.2022.2066232
- Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. 2007. О смешанных задачах для термоэлектрорупругих сред с разрывными граничными условиями. *Доклады Академии наук*. 412(6): 753–758.
- Othmani Ch., Khelfa T. 2023. Effect of graded pre-stress on the propagation of guided waves in functionally graded piezoelectric–piezomagnetic materials. *Mechanics Research Communications*. 127: 104037. doi: 10.1016/j.mechrescom.2022.104037
- Kumar D., Kundu S. 2023. Effect of initial stresses on the surface wave propagation in highly anisotropic piezoelectric composite media. *Waves in Random and Complex Media*. doi: 10.1080/17455030.2022.2164093
- Guha S., Singh A.K. 2020. Effects of initial stresses on reflection phenomenon of plane waves at the free surface of a rotating piezothermoelastic fiber-reinforced composite half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*. 181: 105766. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105766
- Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. 1971. Об описании влияния конечных деформаций на скорости распространения упругих волн. *Доклады Академии наук СССР*. 198(2): 316–318.
- Гринфельд М.А., Мовчан А.А. 1975. Влияние предварительного деформирования на распространение упругих волн. *Известия Академии наук СССР. Серия физика Земли*. 8: 29–35.
- Калинчук В.В., Белянкова Т.И., Евдокимова О.В. 2006. Определяющие соотношения динамики преднапряженной пьезоактивной среды в отсутствие внешних электрических полей. *Вестник Южного научного центра*. 2(1): 16–23. doi: 10.23885/1813-4289-2006-2-1-16-23
- Белянкова Т.И., Калинчук В.В. 2020. О влиянии электростатического поля на ПАВ в предварительно напряженных сегнетоэлектрических гетероструктурах. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 6: 101–110. doi: 10.31857/S0572329920050037
- Белянкова Т.И., Калинчук В.В. 2017. К моделированию преднапряженного термоэлектрорупругого полупространства с покрытием. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 1: 117–135.
- Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Ломакина Л.В. *Расчет однородного начально-деформированного состояния термоэлектрорупругих материалов класса бтт, наведенного за счет механических, электрических и температурных воздействий. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ*. Номер свидетельства: RU 2022612390. Патентное ведомство: Россия. Номер заявки 2022610277, дата регистрации 11.01.2022, дата публикации: 28.02.2022.
- Най Дж. 1967. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц*. М., Мир: 385 с.

REFERENCES

1. Mindlin R.D. 1961. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In: *Problems of Continuum Mechanics: Contributions in Honor of the Seventieth Birthday of Academician N.I. Muskhelishvili*, Philadelphia, SIAM: 282–290.
2. Nowacki W. 1965. A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals. *Proceedings of Vibration Problems*. 6(1): 3–15.
3. Tiersten H.F. 1971. On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity. *International Journal of Engineering Sciences*. 9(7): 587–604. doi: 10.1016/0020-7225(71)90062-0
4. Chandrasekharaiah D.S. 1984. A temperature-rate-dependent theory of thermopiezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. 7(3–4): 293–306. doi:10.1080/01495738408942213
5. Chandrasekharaiah D.S. 1988. A generalized linear thermoelasticity theory for piezoelectric media. *Acta Mechanica*. 71(1–4): 39–49. doi: 10.1007/BF01173936
6. Sharma M.D. 2010. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezo-thermoelastic media. *Acta Mechanica*. 215(1–4): 307–318. doi:10.1007/s00707-010-0336-3
7. Biswas S. 2020. Surface waves in piezothermoelastic transversely isotropic layer lying over piezothermoelastic transversely isotropic half-space. *Acta Mechanica*. 232(2): 373–387. doi: 10.1007/s00707-020-02848-8
8. Kuang Z.-B., Yuan X.-G. 2011. Reflection and transmission of waves in pyroelectric and piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*. 330(6): 1111–1120. doi: 10.1016/j.jsv.2010.09.026
9. Singh P., Singh A.K., Paswan B., Chattopadhyay A. 2023. Mathematical study on reflection and transmission of plane waves in a rotating piezo-thermo-elastic composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 30(14): 2941–2952. doi: 10.1080/15376494.2022.2066232
10. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. 2007. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics*. 52(2): 90–95. doi: 10.1134/S102833580702005X
11. Othmani Ch., Khelfa T. 2023. Effect of graded pre-stress on the propagation of guided waves in functionally graded piezoelectric–piezomagnetic materials. *Mechanics Research Communications*. 127: 104037. doi: 10.1016/j.mechrescom.2022.104037
12. Kumar D., Kundu S. 2023. Effect of initial stresses on the surface wave propagation in highly anisotropic piezoelectric composite media. *Waves in Random and Complex Media*. doi: 10.1080/17455030.2022.2164093
13. Guha S., Singh A.K. 2020. Effects of initial stresses on reflection phenomenon of plane waves at the free surface of a rotating piezothermoelastic fiber-reinforced composite half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*. 181: 105766. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105766
14. Guz' A.N., Makhort F.G. 1971. [Description of the effect of finite strains on the velocity of elastic waves]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 198(2): 316–318. (In Russian).
15. Grinfel'd M.A., Movchan A.A. 1975. [Implications of preliminary deformation for the propagation of elastic waves]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya fizika Zemli*. 8: 29–35. (In Russian).
16. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Evdokimova O.V. 2006. [Determining ratios of prestressed piezoelectric medium dynamics in absence of external electric fields]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 2(1): 16–23. (In Russian). doi: 10.23885/1813-4289-2006-2-1-16-23
17. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2020. Influence of an electrostatic field on saw in prestressed ferroelectric heterostructures. *Mechanics of Solids*. 55(6): 844–851. doi: 10.3103/S0025654420050039
18. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. On the modeling of a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 52(1): 95–110. doi: 10.3103/S0025654417010113
19. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V. *Raschet odnorodnogo nachal'no-deformirovannogo sostoyaniya termoelektroprugikh materialov klassa 6mm, navedennogo za schet mekhanicheskikh, elektricheskikh i temperaturnykh vozdeystviy. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM*. [Calculation of the homogeneous initial deformed state of thermoelectroelastic materials of class 6mm, induced due to mechanical, electrical and temperature influences. Certificate of registration of a computer program]. Certificate number: RU 2022612390. Patent office: Russia. Application number 2022610277, registration date 11 January 2022, publication date 28 February 2022.
20. Nye J.F. 1957. *Physical properties of crystals*. Oxford, Clarendon press: 322 p.

Поступила 06.07.2023