

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640250204

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ/ПЬЕЗОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН ИЗ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2024 г. Т.И. Белянкова¹, Е.И. Ворович², чл.-корр. РАН В.В. Калинин¹

Аннотация. Предложен подход к моделированию составных магнитоэлектростатических структур из преднапряженных неоднородных пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев. В качестве структуры рассмотрены магнитоэлектростатические пластины, внешние поверхности которых в отсутствие механических напряжений свободно контактируют с вакуумом, на границе раздела слоев выполнены условия сцепления. Распространение волн в структуре вызвано действием удаленного источника гармонических колебаний. Слои выполнены из функционально градиентных материалов, свойства которых достаточно произвольным образом меняются по толщине. В каждом из слоев присутствуют начальные деформации, наведенные действием начальных механических напряжений. Начально-деформированное состояние слоев пластины полагается однородным, неоднородность начального напряженного состояния обусловлена неоднородностью свойств материалов. Наличие в слоях электрического и магнитного полей вызвано действием механических напряжений, связано с проявлением пьезоэлектрического и пьезомагнитного эффектов и зависит от пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств материалов. В основе предложенного подхода, с одной стороны, лежит использование линеаризованных в лагранжевой системе координат, связанной с естественным состоянием материала, определяющих соотношений и уравнений движения преднапряженной магнитоэлектростатической среды. С другой стороны – сведение с помощью интегрального преобразования Фурье систем дифференциальных уравнений 2-го порядка в частных производных с переменными коэффициентами к системе обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение последней строится на основе решения системы задач Коши с начальными краевыми условиями. Использование численных методов позволяет быстро и эффективно восстанавливать значения неизвестных функций напряжений, перемещений, электрических и магнитных потенциалов по толщине слоев, строить интегральное представление, описывающее движение произвольной точки структуры, и дисперсионное уравнение, решение которого определяет основные характеристики поверхностных акустических волн.

Ключевые слова: начальные деформации, начально-деформированное состояние, функционально градиентный пьезоэлектрический материал, функционально градиентный пьезомагнитный материал, магнитоэлектростатический материал, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, начально-краевые задачи Коши, поверхностные акустические волны (ПАВ), нормальные поверхностные волны, волны Рэлея – Лэмба.

ON THE PROBLEM OF MODELING PIEZOELECTRIC/PIEZOMAGNETIC PLATES FROM PRE-STRESSED FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS

T.I. Belyankova¹, E.I. Vorovich², Corresponding Member RAS V.V. Kalinchuk¹

Abstract. An approach to modeling composite magneto-electroelastic structures from prestressed inhomogeneous piezoelectric and piezomagnetic layers is proposed. Magneto-electroelastic plates are considered as a structure, the outer surfaces of which in the absence of mechanical stresses freely contact with vacuum,

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: tbelen415@mail.ru

² Донской государственный технический университет (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

and the adhesion conditions are satisfied at the interface between the layers. Wave propagation in the structure is caused by the action of a remote source of harmonic oscillations. The layers are made of functionally graded materials, the properties of which vary quite arbitrarily across the thickness. Each of the layers contains initial deformations induced by the action of initial mechanical stresses. The initial strain state of the plate layers is assumed to be uniform, the inhomogeneity of the initial stress state is due to the inhomogeneity of the material properties. The presence of electric and magnetic fields in the layers is caused by the action of mechanical stresses, is associated with the manifestation of piezoelectric and piezomagnetic effects and depends on the piezoelectric and piezomagnetic properties of materials. The proposed approach is based, on the one hand, on the use of linearized in the Lagrangian coordinate system associated with the natural state of the material, constitutive relations and equations of motion of a prestressed magnetoelectroelastic medium. On the other hand, it is reduced by means of the integral Fourier transform of systems of second-order partial differential equations with variable coefficients to a system of ordinary second-order differential equations with variable coefficients. The solution of the latter is based on the solution of a system of Cauchy problems with initial boundary conditions. The use of numerical methods allows one to quickly and efficiently restore the values of unknown functions of stresses, displacements, electric and magnetic potentials across the thickness of layers, construct an integral representation describing the motion of an arbitrary point of the structure, and a dispersion equation, the solution of which determines the main characteristics of surface acoustic waves

Keywords: initial deformations, initially deformed state, functionally gradient piezoelectric material, functionally gradient piezomagnetic material, magnetoelectroelastic material, systems of ordinary differential equations, initial-boundary value problems of Cauchy, surface acoustic waves (SAW), normal surface waves, Rayleigh-Lamb waves.

1. Gulyaev Y.V. 1969. Electroacoustic surface waves in solids. *Soviet Physics. Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 9: 37–39.
2. Matthews H. 1977. *Surface wave filters: design, construction and use*. New York, John Wiley & Sons: 521 p.
3. Maugin G. 1988. *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. Amsterdam, North Holland: 620 p.
4. Al'shits V.I., Darinskii A.N., Lothe J. 1992. On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties. *Wave Motion*. 16(3): 265–283. doi: 10.1016/0165-2125(92)90033-X
5. Vinyas M. 2021. Computational analysis of smart magneto-electro-elastic materials and structures: review and classification. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 28(3): 1205–1248. doi: 10.1007/s11831-020-09406-4
6. Wang H., Wu B., Gao X., Liu Y., Li X., Liu X. 2023. Ultrasonic guided wave defect detection method for tank bottom plate based on SH0 mode multichannel magnetostrictive sensor. *Measurement*. 223: 113790. doi: 10.1016/j.measurement.2023.113790
7. Pan E. 2002. Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimerials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 53(5): 815–838. doi: 10.1007/s00033-002-8184-1
8. Chen J.Y., Pan E., Chen H. 2007. Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures*. 44(3–4): 1073–1085. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.003
9. Othmani C., Zhang H., Lü C., Wang Y.Q., Kamali A.R. 2022. Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites. *Composite Structures*. 286: 115245. doi: 10.1016/j.compstruct.2022.115245
10. Dziatkiewicz G. 2021. New forms of the fundamental solutions for 3D magneto-electroelasticity equations. *Applied Mathematical Modelling*. 91: 563–580. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.052
11. Kuo H.-Y., Wang Y.-L. 2012. Optimization of magnetoelectricity in multiferroic fibrous composites. *Mechanics of Materials*. 50: 88–99. doi: 10.1016/j.mechmat.2012.03.005
12. Sládek J., Sládek V., Pan E. 2016. Effective properties of coated fiber composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 28(1): 97–107. doi: 10.1177/1045389X16644786
13. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Турчин А.С. 2024. SH-волны на поверхности биморфной магнитоэлектроруупругой пластины. *Наука Юга России*. 20(2): 3–15. doi: 10.7868/S25000640240201
14. Ezzin H. 2025. Vibration analysis of power law functionally graded magneto-electro-elastic plate. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 25(8): 2550077. doi: 10.1142/S0219455425500774
15. Zhang R., Pang Y., Feng W. 2014. Propagation of Rayleigh waves in a magneto-electro-elastic half-space with initial stress. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 21(7): 538–543. doi: 10.1080/15376494.2012.699595
16. Li L., Wei P.J. 2014. Surface wave speed of functionally graded magneto-electro-elastic materials with initial stresses. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 44(3): 49–64. doi: 10.2478/jtam-2014-0016
17. Xia Q., Du J., Wang J. 2012. Rayleigh waves in piezomagnetic/piezoelectric structures with biasing magnetic fields. In: *Proceedings of the 2012 Symposium on piezoelectricity, acoustic waves, and device applications (Shanghai, China, 23–25 November 2012)*. IEEE: 179–182. doi: 10.1109/SPAWDA.2012.6464065
18. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2016. Dynamic equations of a prestressed magneto-electroelastic medium. *Mechanics of Solids*. 51(5): 588–595. doi: 10.3103/S0025654416050125
19. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2023. Rayleigh waves in an electroelastic medium with prestressed inhomogeneous coating. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*. 56(4): 424–434. doi: 10.1134/S1063454123040040
20. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. 2025. Propagation of SH-waves in a pre-stressed compound piezoelectric/piezomagnetic plate. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2440024. doi: 10.1142/S2010135X24400241