

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640250301

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА В ФОРМЕ ПЛОСКОСТИ БЕЗ ОСТРОУГОЛЬНОГО СЕКТОРА

© 2025 г. Академик В.А. Бабешко^{1,2}, В.В. Лозовой¹, И.С. Телятников¹

Аннотация. Впервые построено точное решение контактной задачи о действии жесткого клиновидного штампа раствора в диапазоне $270\text{--}360^\circ$. Штамп действует на слой композитного материала, имеющего произвольную анизотропию. Использовано гомеоморфное отображение топологического пространства носителя этого штампа на топологическое пространство первого квадранта с последующим построением фрактала и применением точного решения двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа для клиновидного штампа с прямым углом. По сравнению с полосовыми штампами решение содержит аддитивно дополнительный член, описывающий концентрацию контактных напряжений в угловой точке штампа. Расчет показателя особенности концентрации контактных напряжений в этой точке близок к значениям, полученным приближенно численными методами в ряде работ. В зоне, рассматриваемой вдали от вершины штампа, точное решение переходит в решение для случая полубесконечного штампа. Разработанный метод применим для композитов произвольных анизотропий, возникающих в линейно упругих материалах и кристаллах любых сечений. Он может быть полезен в инженерной практике при оценке концентраций контактных напряжений в зонах угловых точек штампов, имеющих подобные углы. В сейсмологии этот подход применим для оценки концентрации напряжений в литосферных плитах в зонах перехода горной гряды в равнинную при наличии угловых зон указанного диапазона.

Ключевые слова: контактные задачи, плоскость с остроугольной выемкой, уравнение Винера – Хопфа, концентрация напряжений.

CONTACT PROBLEM FOR A STAMP IN THE FORM OF A PLANE WITHOUT AN ACUTE-ANGLED SECTOR

Academician RAS V.A. Babeshko^{1,2}, V.V. Lozovoy¹, I.S. Telyatnikov¹

Abstract. For the first time, an accurate solution of the contact problem of the action of a rigid wedge-shaped die having a solution in the range of $270\text{--}360^\circ$ is constructed. The stamp acts on a layer of composite material having an arbitrary anisotropy. A homeomorphic mapping of the topological space of the bearer of this stamp onto the topological space of the first quadrant is used, followed by the construction of a fractal and the application of an exact solution of the two-dimensional Wiener-Hopf integral equation for a wedge-shaped stamp with a right angle. In comparison with strip stamps, the solution contains an additively additional term describing the concentration of contact stresses at the angular point of the stamp. The calculation of the characteristic of the contact stress concentration at this point is close to the values obtained by approximate numerical methods in a number of studies. In the area considered away from the top of the stamp, the exact solution becomes the solution for the case of a semi-infinite stamp. The developed method is applicable to composites of arbitrary anisotropies occurring in linearly elastic materials and crystals of any cross-section. It can be useful in engineering practice when assessing the concentrations of contact stresses in the zones of the corner points of stamps having similar angles. In seismology, this approach is applicable for estimating stress concentrations in lithospheric plates in the zones of transition of a mountain ridge to a plain in the presence of angular zones of the specified range.

Keywords: contact problems, plane with an acute-angled notch, Wiener-Hopf equation, stress concentration.

¹ Федеральное исследовательское учреждение Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: babeshko41@mail.ru

² Кубанский государственный университет (Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation), Российская Федерация, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

1. Freund L.B. 1998. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge, UK, Cambridge University Press: 520 p.
2. Achenbach J.D. 1973. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, North-Holland Pub. Co.; New York, American Elsevier Pub. Co.: 480 p.
3. Norris A.N., Achenbach J.D. 1984. Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 37(4): 565–580. doi: 10.1093/qjmam/37.4.565
4. Горячева И.Г. 2001. *Механика фрикционного взаимодействия*. М., Наука: 478 с.
5. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. 2008. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов*. М., Физматлит: 352 с.
6. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2009. *Динамика поверхности неоднородных сред*. М., Физматлит: 312 с.
7. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2002. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуграниченных тел*. М., Физматлит: 240 с.
8. Колесников В.И., Беляк О.А. 2021. *Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов*. М., Физматлит: 265 с.
9. Кристенсен Р. 1982. *Введение в механику композитов*. М., Мир: 335 с.
10. Kushch V.I. 2013. *Micromechanics of composites: multipole expansion approach*. Oxford, Waltham, Elsevier Butterworth-Heinemann: 489 p. doi: 10.1016/C2012-0-03565-X
11. Ворович И.И., Бабешко В.А. 1979. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М., Наука: 320 с.
12. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С. 2024. Точное решение двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа в задачах для анизотропных сред. *Наука Юга России*. 20(1): 3–5. doi: 10.7868/25000640240101
13. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. 1989. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М., Наука: 344 с.
14. Рвачев В.Л., Проценко В.С. 1977. *Контактные задачи теории упругости для неклассических областей*. Киев, Наукова думка: 236 с.
15. Parihar K.S., Keer L.M. 1979. The singularity at the apex of a bounded wedge-shaped stamp. *Journal of Applied Mechanics*. 46(3): 577–580. doi: 10.1115/1.3424609

REFERENCES

1. Freund L.B. 1998. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge, UK, Cambridge University Press: 520 p.
2. Achenbach J.D. 1973. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, North-Holland Pub. Co.; New York, American Elsevier Pub. Co.: 480 p.
3. Norris A.N., Achenbach J.D. 1984. Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 37(4): 565–580. doi: 10.1093/qjmam/37.4.565
4. Goryacheva I.G. 2001. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya. [Mechanics of frictional interaction]*. Moscow, Nauka: 478 p. (In Russian).
5. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. 2008. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov. [Methods of boundary integral equations and boundary elements]*. Moscow, Fizmatlit: 352 p. (In Russian).
6. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2009. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred. [Dynamics of the surface of inhomogeneous media]*. Moscow, Fizmatlit: 312 p. (In Russian).
7. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2002. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh*

- poluogranichennykh tel.* [Dynamic contact problems for prestressed semi-infinite bodies]. Moscow, Fizmatlit: 240 p. (In Russian).
8. Kolesnikov V.I., Belyak O.A. 2021. *Matematicheskie modeli i eksperimental'nye issledovaniya – osnova konstruirovaniya geterogennykh antifriktsionnykh materialov.* [Mathematical models and experimental studies – the basis for the design of heterogeneous antifriction materials]. Moscow, Fizmatlit: 265 p. (In Russian).
9. Christensen R.M. 1982. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov.* [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow, Mir: 335 p. (In Russian).
10. Kushch V.I. 2013. *Micromechanics of composites: multipole expansion approach.* Oxford, Waltham, Elsevier Butterworth-Heinemann: 489 p. doi: 10.1016/C2012-0-03565-X
11. Vorovich I.I., Babeshko V.A. 1979. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey.* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka: 320 p. (In Russian).
12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. 2024. [Exact solution of the two-dimensional Wiener-Hopf integral equation in problems for anisotropic media]. *Nauka Yuga Rossii.* 20(1): 3–5. (In Russian). doi: 10.7868/25000640240101
13. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. 1989. *Dinamika neodnorodnykh lineynno-uprugikh sred.* [Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media]. Moscow, Nauka: 344 p. (In Russian).
14. Rvachev V.L., Protsenko V.S. 1977. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey.* [Contact problems of elasticity theory for nonclassical fields]. Kiev, Naukova dumka: 236 p. (In Russian).
15. Parihar K.S., Keer L.M. 1979. The singularity at the apex of a bounded wedge-shaped stamp. *Journal of Applied Mechanics.* 46(3): 577–580. doi: 10.1115/1.3424609

Поступила 13.03.2025

Принята 03.06.2025