

УДК 539.3  
DOI: 10.7868/S25000640260101

## ПРОБЛЕМА ПОДАТЛИВОСТИ ЖЕСТКОГО УЗКОГО ШТАМПА В АНИЗОТРОПНЫЙ КОМПОЗИТ

© 2026 г. Академик В.А. Бабешко<sup>1</sup>, И.С. Телятников<sup>2</sup>, В.С. Евдокимов<sup>1</sup>

**Аннотация.** Впервые построено точное решение контактной задачи о действии полосового жесткого штампа конечной ширины на композитный слоистый материал, имеющий анизотропную структуру, в предположении, что относительная ширина штампа мала. Ранее подобные задачи рассматривались только для случаев изотропных материалов. Как правило, контактные задачи сводились к сингулярному интегральному уравнению с выделенной сингулярной частью ядра интегрального уравнения, для которого строилось приближенное асимптотическое решение. Этот подход априорно исключал рассмотрение случаев анизотропных материалов. В результате использования такого подхода утрачивалась возможность исследования параметров податливости узких штампов при вдавливании в анизотропный материал, а также возможность исследования динамических волновых процессов вне штампов.

Попытки исследования этим методом контактных задач для анизотропных случаев предпринимались, но были решены задачи лишь для частных случаев. В настоящей работе с опорой на ранее доказанные теоремы о разрешимости контактных задач для анизотропных случаев развивается метод построения решения для случая узких штампов. Для этого используется факторизационный подход, позволивший найти решение интегрального уравнения для анизотропного композита для узких штампов.

Результат настоящей статьи может быть полезен как в инженерной практике, так и в геофизике при описании поведения горной гряды на анизотропной коренной породе. Кроме этого, метод открывает возможность исследовать анизотропные случаи в динамической постановке с помощью контурных интегралов в представлении решений.

**Ключевые слова:** контактная задачи, узкие штампы, композитный материал, анизотропная среда, интегральное уравнение, метод блочного элемента.

### THE PROBLEM OF COMPLIANCE OF A RIGID NARROW STAMP IN AN ANISOTROPIC COMPOSITE

Academician RAS V.A. Babeshko<sup>1</sup>, I.S. Telyatnikov<sup>2</sup>, V.S. Evdokimov<sup>1</sup>

**Abstract.** This paper presents the first exact solution to the contact problem of a finite-width rigid stamp acting on a composite laminate with an anisotropic structure, assuming a small relative stamp width. Previously, similar problems were considered only for isotropic materials. Typically, contact problems were reduced to a singular integral equation with a distinct singular part of the integral equation kernel, for which an approximate asymptotic solution was constructed. This approach a priori excluded the consideration of anisotropic materials. As a result, the use of this approach negated the possibility of studying the compliance parameters of narrow stamps when pressed into anisotropic materials, as well as the possibility of studying dynamic wave processes outside the stamps.

Attempts to use this method to study contact problems for anisotropic cases have been made, but only for special cases. In this paper, building on previously proven theorems on the solvability of contact problems for anisotropic cases, a method for constructing a solution for the case of narrow stamps is developed. To achieve this, a factorization approach was used, allowing us to find a solution to the integral equation for an anisotropic composite for narrow punches.

<sup>1</sup> Кубанский государственный университет (Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation), Российская Федерация, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, e-mail: babeshko41@mail.ru, evdok\_vova@mail.ru

<sup>2</sup> Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: ilux\_t@list.ru

The results of this article can be useful in both engineering practice and geophysics for describing the behavior of a rock ridge on anisotropic bedrock. Furthermore, the method opens the possibility of studying anisotropic cases in a dynamic setting using contour integrals in the solution representation.

**Keywords:** contact problems, narrow stamps, composite material, anisotropic medium, integral equation, block element method.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С.Г. 1977. *Теория упругости анизотропного тела*. М., Наука: 415 с.
2. Кристенсен Р. 1982. *Введение в механику композитов*. М., Мир: 335 с.
3. Kushch V.I. 2013. *Micromechanics of composites: multipole expansion approach*. Waltham, Elsevier Butterworth-Heinemann: 489 p.
4. McLaughlin R. 1977. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*. 15(4): 237–244. doi: 10.1016/0020-7225(77)90058-1
5. Garces G., Bruno G., Wanner A. 2007. Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites. *Acta Materialia*. 55(16): 5389–5400. doi: 10.1016/j.actamat.2007.06.003
6. Levandovskiy A., Melnikov B. 2015. Finite element modeling of porous material structure represented by a uniform cubic mesh. *Applied Mechanics and Materials*. 725–726: 928–936. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.928
7. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2002. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуграниченных тел*. М., Физматлит: 240 с.
8. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. 1987. *Методы граничных элементов*. М., Мир: 524 с.
9. Горячева И.Г. 2001. *Механика фрикционного взаимодействия*. М., Наука: 478 с.
10. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. 2020. Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Materials Physics and Mechanics*. 46(1): 139–148. doi: 10.18149/MPM.4612020\_14
11. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. 2006. *Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред*. М., Физматлит: 240 с.
12. Ватульян А.О. 1977. Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя. *Прикладная математика и механика*. 41(4): 727–734.
13. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. 2008. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов*. М., Физматлит: 352 с.
14. Гузь А.Н., Томашевский А.Т., Шульга Н.А. 1988. *Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред*. Киев, Вища школа: 270 с.
15. Акбаров А.Н., Гузь А.Н., Мовсумов Э.А., Мустафаев С.М. 1995. *Механика материалов с искривленными структурами*. Киев, Наукова думка: 320 с.
16. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С. 2024. К теории контактных задач для композитных сред с анизотропной структурой. *Доклады Российской*

- академии наук. *Физика, технические науки*. 518(1): 23–30. doi: 10.31857/S2686740024050047
17. Ворович И.И., Бабешко В.А. 1979. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М., Наука: 319 с.
  18. Попов Г.Я. 1963. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. *Известия Академии наук Армянской ССР. Серия физико-математических наук*. 16(2): 15–32.
  9. Goryacheva I.G. 2001. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya*. [Mechanics of frictional interaction]. Moscow, Nauka: 478 p. (In Russian).
  10. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. 2020. Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Materials Physics and Mechanics*. 46(1): 139–148. doi: 10.18149/MPM.4612020\_14
  11. Ayzikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon' A.V., Krenev L.I., Trubchik I.S. 2006. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred*. [Contact problems of elasticity theory for inhomogeneous media]. Moscow, Fizmatlit: 240 p. (In Russian).
  12. Vatul'yan A.O. 1977. [Contact problems with adhesion for an anisotropic layer]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 41(4): 727–734. (In Russian).
  13. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. 2008. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov*. [Methods of boundary integral equations and boundary elements]. Moscow, Fizmatlit: 352 p. (In Russian).
  14. Guz' A.N., Tomashevskiy A.T., Shul'ga N.A. 1988. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred*. [Contact problems of elasticity theory for inhomogeneous media]. Kiev, Vishcha shkola: 270 p. (In Russian).
  15. Akbarov A.N., Guz' A.N., Movsumov E.A., Mustafaev S.M. 1995. *Mekhanika materialov s iskrivlennymi strukturami*. [Mechanics of materials with curved structures]. Kiev, Naukova dumka: 320 p. (In Russian).
  16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. 2024. [On the theory of contact problems for composite media with anisotropic structure]. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki*. 518(1): 23–30. (In Russian). doi: 10.31857/S2686740024050047
  17. Vorovich I.I., Babeshko V.A. 1979. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey*. [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Moscow, Nauka: 319 p. (In Russian)
  18. Popov G.Ya. 1963. [Solution of the plane contact problem of elasticity theory in the presence of cohesive or frictional forces]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoy SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 16(2): 15–32. (In Russian).

## REFERENCES

1. Lekhnitskiy S.G. 1977. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow, Nauka: 415 p. (In Russian).
2. Kristensen R. 1982. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. [Introduction to composite mechanics]. Moscow, Mir: 335 p. (In Russian).
3. Kushch V.I. 2013. *Micromechanics of composites: multipole expansion approach*. Waltham, Elsevier Butterworth-Heinemann: 489 p.
4. McLaughlin R. 1977. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*. 15(4): 237–244. doi: 10.1016/0020-7225(77)90058-1
5. Garces G., Bruno G., Wanner A. 2007. Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites. *Acta Materialia*. 55(16): 5389–5400. doi: 10.1016/j.actamat.2007.06.003
6. Levandovskiy A., Melnikov B. 2015. Finite element modeling of porous material structure represented by a uniform cubic mesh. *Applied Mechanics and Materials*. 725–726: 928–936. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.928
7. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2002. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh poluogranichennykh tel*. [Dynamic contact problems for prestressed semi-bounded bodies]. Moscow, Fizmatlit: 240 p. (In Russian).
8. Brebiya K., Telles Zh., Vroubel L. 1987. *Metody granichnykh elementov*. [Boundary element methods]. Moscow, Mir: 524 p. (In Russian).

Поступила 16.12.2025

Принята 09.02.2026