

УДК 532.516:536.24
DOI: 10.7868/S25000640260303

ТОЧНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПРОНИЦАЕМОМ СЛОЕ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

© 2026 г. К.В. Губарева¹, Е.Ю. Просвирыков^{2,3}

Аннотация. В рамках общей нестационарной постановки рассмотрено движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое, ограниченном двумя проницаемыми плоскостями. Проницаемость границ задана постоянной нормальной компонентой скорости, направленной вдоль вертикальной оси. Принято наличие продольного градиента давления. Поле скорости аппроксимировано полиномом второй степени по поперечной координате с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты и времени. Уравнение Навье – Стокса сведено к рекуррентной системе параболических уравнений для коэффициентов полинома. Уравнение энергии с диссипативным нагревом приводит к аналогичной системе для коэффициентов температуры. Подробно исследован стационарный случай. Построено точное стационарное решение для случая квадратичного профиля скорости. Получены аналитические выражения для коэффициентов скорости и температуры через элементарные функции, включающие экспоненты и полиномы. Проанализировано влияние проницаемости границ на поле скорости, диссипативную функцию и температуру. Проницаемость любого знака (вдув или отсос) снижает максимальный нагрев жидкости по сравнению со случаем непроницаемых стенок и смещает положение теплового максимума к соответствующей границе: при вдуве – к верхней стенке, при отсосе – к нижней. Максимальные значения температуры при вдуве и отсосе практически одинаковы, а положения максимумов зеркально симметричны относительно середины слоя. Полученное решение регулярно переходит в известное решение для непроницаемых границ при стремлении скорости поперечного потока к нулю. Аналитические выражения допускают простое масштабирование и могут быть использованы для параметрического анализа тепловых режимов в микрофлюидных устройствах и теплообменных аппаратах с проницаемыми стенками, а также для верификации численных алгоритмов.

Ключевые слова: уравнения Навье – Стокса, уравнение энергии, диссипация, точные решения, проницаемые границы, градиент давления, полиномиальные решения.

EXACT POLYNOMIAL SOLUTIONS FOR NONISOTHERMAL FLOWS IN A PERMEABLE LAYER WITH A PRESSURE GRADIENT

K.V. Gubareva¹, E.Yu. Prosviryakov^{2,3}

Abstract. Within a general unsteady formulation, the motion of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer bounded by two permeable planes is considered. The boundary permeability is described by a constant normal velocity component directed along the vertical axis. The presence of a longitudinal pressure gradient is assumed. The velocity field is approximated by a second-degree polynomial in the transverse coordinate with coefficients depending on the vertical coordinate and time. The Navier-Stokes equation is

¹ Самарский государственный технический университет (Samara State Technical University, Samara, Russian Federation), Российская Федерация, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, e-mail: r.kristina2017@mail.ru

² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation), Российская Федерация, 620062, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, e-mail: evgen_pros@mail.ru

³ Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук (Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation), Российская Федерация, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34

reduced to a recurrent system of parabolic equations for the polynomial coefficients. The energy equation with dissipation heating leads to a similar system for the temperature coefficients. In the present work the steady case is studied in detail. An exact steady-state solution is constructed for the case of a quadratic velocity profile. Analytical expressions for the velocity and temperature coefficients are obtained in terms of elementary functions, including exponentials and polynomials. The influence of boundary permeability on the velocity field, dissipation function, and temperature is analyzed. It is shown that permeability of any sign (injection or suction) reduces the maximum heating of the fluid compared to the case of impermeable walls and shifts the location of the thermal maximum toward the corresponding boundary: injection shifts it to the upper wall, suction to the lower wall. It is found that the maximum temperatures for injection and suction are almost equal, and the positions of the maxima are mirror-symmetric with respect to the midplane. The obtained solution regularly reduces to the known solution for impermeable boundaries as the transverse flow velocity tends to zero. The analytical expressions allow straightforward scaling and can be used for parametric analysis of thermal regimes in microfluidic devices and heat exchangers with permeable walls, as well as for verification of numerical algorithms.

Keywords: Navier-Stokes equations, energy equation, dissipation, exact solutions, permeable boundaries, pressure gradient, polynomial solutions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berman A.S. 1953. Laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*. 24(9): 1232–1235. doi: 10.1063/1.1721476
2. Yuan S.W. 1956. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*. 27(3): 267–269. doi: 10.1063/1.1722355
3. Wang C.Y. 1989. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations. *Applied Mechanics Reviews*. 42(11S): S269–S282. doi: 10.1115/1.3152400
4. Wang C.Y. 1991. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 23: 159–177. doi: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111
5. Полянин А.Д., Аристов С.Н. 2011. Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье – Стокса и Эйлера. *Теоретические основы химической технологии*. 45(6): 696–701.
6. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. 2009. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 43(5): 642–662. doi: 10.1134/S0040579509050066
7. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. 2016. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*. 51(2): 148–154. doi: 10.1134/S0015462816020034
8. Губарева К.В., Просвирыков Е.Ю., Еремин А.В. 2026. Точные решения уравнений Навье – Стокса и энергии для описания неоднородных неизотермических вертикально завихренных течений вязкой жидкости с диссипацией в областях с проницаемыми границами. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 30(1): 26–46. doi: 10.14498/vsgtu2276
9. Gubareva K.V., Prosviryakov E.Yu. 2025. Exact analytical solution to the problem of stationary convection in the Boussinesq approximation with account for viscous dissipation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 6: 23–38. doi: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038
10. Лыков А.В. 1967. *Теория теплопроводности*. М., Высшая школа: 600 с.
11. Регирер С.А. 1962. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 5(30): 65–74.

12. Aristov S.N., Gitman I.M. 2002. Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*. 464: 209–215. doi: 10.1017/S0022112002001003
13. Сизых Г.Б. 2022. Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 26(1): 190–201. doi: 10.14498/vsgtu1900
14. Шварц К.Г. 2018. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с внутренним линейным источником тепла. *Прикладная математика и механика*. 82(1): 25–30.
15. Аристов С.Н., Шварц К.Г. 2006. *Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости*. Пермь, изд-во Пермского государственного университета: 164 с.
1. Berman A.S. 1953. Laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*. 24(9): 1232–1235. doi: 10.1063/1.1721476
2. Yuan S.W. 1956. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*. 27(3): 267–269. doi: 10.1063/1.1722355
3. Wang C.Y. 1989. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations. *Applied Mechanics Reviews*. 42(11S): S269–S282. doi: 10.1115/1.3152400
4. Wang C.Y. 1991. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 23: 159–177. doi: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111
5. Polyanin A.D., Aristov S.N. 2011. A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 45(6): 885–890. doi: 10.1134/S0040579511060091
6. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. 2009. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 43(5): 642–662. doi: 10.1134/S0040579509050066
7. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. 2016. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*. 51(2): 148–154. doi: 10.1134/S0015462816020034
8. Gubareva K.V., Prosviryakov E.Yu., Eremin A.V. 2026. [Exact solutions of the Navier–Stokes and energy equations for describing inhomogeneous non-isothermal vertically swirling flows of a viscous fluid with dissipation in regions with permeable boundaries]. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 30(1): 26–46. (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu2276
9. Gubareva K.V., Prosviryakov E.Yu. 2025. Exact analytical solution to the problem of stationary convection in the Boussinesq approximation with account for viscous dissipation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 6: 23–38. doi: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038
10. Lykov A.V. 1967. *Teoriya teploprovodnosti*. [Theory of heat conduction]. Moscow, Vysshaya shkola: 600 p. (In Russian).
11. Regirer S.A. 1962. [On an approximate theory of the flow of a viscous incompressible fluid in pipes with porous walls]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*. 5(30): 65–74. (In Russian).
12. Aristov S.N., Gitman I.M. 2002. Viscous flow between two moving parallel disks. Exact solutions and stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*. 464: 209–215. doi: 10.1017/S0022112002001003
13. Sizykh G.B. 2022. [Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls]. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 26(1): 190–201. (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1900
14. Shvarts K.G. 2019. Plane-parallel advective flow in a horizontal layer of an incompressible fluid with an internal linear heat source. *Fluid Dynamics*. 2018. 53(Suppl. 1): S24–S28. doi: 10.1134/S0015462818040237
15. Aristov S.N., Schwartz K.G. 2006. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti*. [Vortex flows of advective nature in a rotating fluid layer]. Perm, Perm State University: 164 p. (In Russian).

REFERENCES

Поступила 28.04.2026

Принята 07.07.2026